

9. НАИЗМЕНИЧНЕ СТРУЈЕ

9.1. Добијање наизменичне струје

Механичким обртањем рама око осе OO' (слика 9.1) сталном угаоном брзином ω у константном пољу магнетне индукције \vec{B} , кроз рам се мења магнетни флукс:

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos(\alpha), \quad (9.1)$$

где је α угао између вектора \vec{B} и нормале на површину рама. При равномерном обртању рама угао α расте линеарно са временом $\alpha = \omega t$, и магнетни флукс кроз сталну брзину S износи:

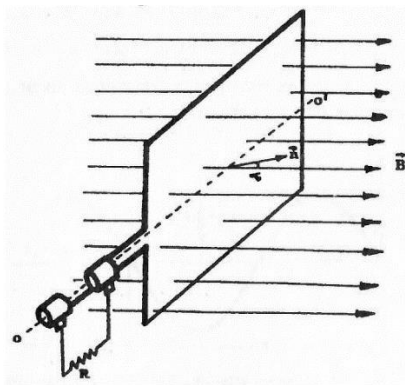
$$\phi = BS \cos(\omega t), \quad (9.2)$$

па је индукована електромоторна сила:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[BS \cos(\omega t)] = -BS \frac{d}{dt} \cos(\omega t) = BS\omega \sin(\omega t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t), \quad (9.3)$$

где је $\varepsilon_0 = BS\omega$ максимална ЕМС и назива се амплитуда, а аргумент ωt је њена фаза. Индукована ЕМС је периодична функција времена, чији је период:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (9.4)$$



Слика 9.1.

Ако је коло затворено онда кроз њега тече струја истог облика:

$$i = I_0 \sin(\omega t), \quad (9.5)$$

где је I_0 максимална струја, а i тренутна вредност наизменичне струје.

Наизменична струја мења величину и смер у току времена и практично је тешко мерити њену тренутну вредност. Због тога се уводе четири величине које карактеришу наизменичну струју: тренутна вредност, ефективна вредност, средња вредност и максимална вредност. До сада смо се упознали тренутну и максималну вредност.

При проласку наизменичне струје кроз чисто омски отпор целокупна електрична енергија претвара се у топлоту. У том случају није важан смер струје јер се топлота развија кад струја тече у било ком смеру. Топлотни ефекат наизменичне струје може се упоредити са топлотним ефектом једносмерне струје при проласку кроз исти отпор за исто време. Ефективна вредност наизменичне струје једнака је по величини оној сталној једносмерној струји која за исто време на једнаком отпору развије исту количину топлоте. Нека је количина топлоте једносмерне струје:

$$Q = I^2 RT, \quad (9.6)$$

За исто време наизменична струја кроз једнаки отпор развије топлоту:

$$Q = \int_0^T Ri^2 dt. \quad (9.7)$$

Како су развијене количине топлоте исте може се писати:

$$I^2 RT = R \int_0^T i^2 dt, \quad (9.8)$$

одакле је:

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{I_0}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt. \quad (9.9)$$

Знајући да је $\sin^2(\omega t) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\omega t)]$, интеграл:

$$\int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T [1 - \cos(2\omega t)] dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T = \frac{T}{2}, \quad (9.10)$$

тако да се из једначине (9.9) добија да је:

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = 0.707 I_0. \quad (9.11)$$

Овај резултат може се уопштити и на величину електромоторне силе и напона:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}} = 0.707 \varepsilon_0. \quad (9.12)$$

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}} = 0.707 U_0. \quad (9.13)$$

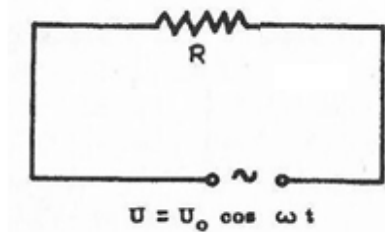
Уколико је јачина струје синусна функција времена онда је средња вредност у току једног периода T :

$$I_s = \frac{1}{T} \int_0^T I_0 \sin(\omega t) dt = \frac{I_0}{\omega T} [-\cos(\omega t)]_0^T = 0. \quad (9.14)$$

9.2. Омски отпор у колу наизменичне струје

На слици 9.2 приказано је коло са чистим омским отпором R у које је прикључен извор наизменичног напона:

$$u = U_0 \cos(\omega t). \quad (9.15)$$

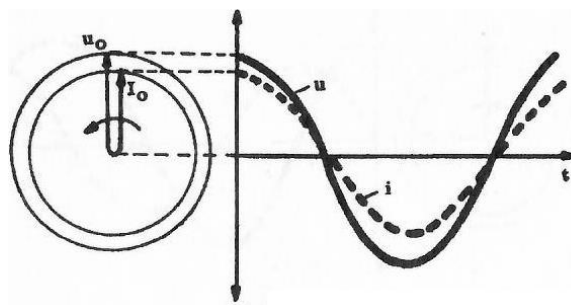


Слика 9.2.

Према Омовом закону јачина струје је:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t), \quad (9.16)$$

где је $I_0 = \frac{U_0}{R}$ максимална вредност струје. Како су i и u , према једначинама (9.15) и (9.16) сразмерни $\cos(\omega t)$, каже се је струја кроз чисти омски отпор у фази са напоном. На слици 9.3 приказан је векторски дијаграм струје и напона у колу са чисто омским отпором. Због тога што су струја и напон у фази, правац и смер ових вектора су једнаки.

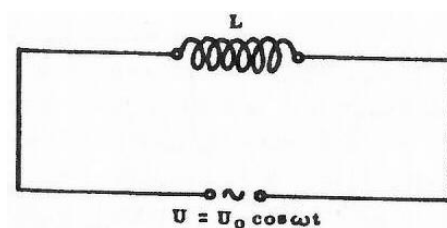


Слика 9.3.

9.3. Индуктивни отпор у колу наизменичне струје

На слици 9.4 приказано је коло са калемом индуктивности L и занемарљивог омског отпора R ($R = 0$), коме је прикључен извор наизменичног напона, једначина (9.15). Овај напон ствара кроз коло струју промењивог интензитета. У калему се због тога индукује ЕМС самоиндукције:

$$\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}. \quad (9.17)$$



Слика 9.4.

Једначина електричног кола је:

$$u + \varepsilon_s = 0, \quad (9.18)$$

односно:

$$U_o \cos(\omega t) - L \frac{di}{dt} = 0, \quad (9.19)$$

одакле је:

$$L \frac{di}{dt} = U_o \cos(\omega t) = u. \quad (9.20)$$

У овом случају индукована ЕМС у калему једнака је прикљученом напону извора.

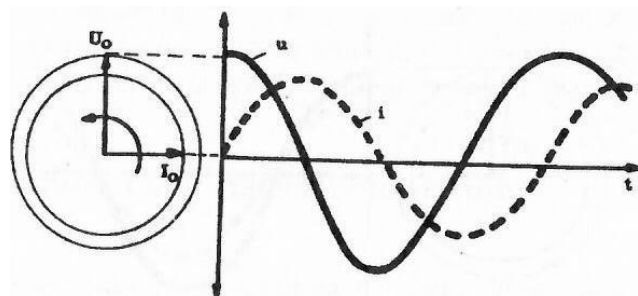
Струја кроз калем је:

$$i = \int_0^t di = \frac{U_o}{L} \int_0^t \cos(\omega t) = \frac{U_o}{\omega L} \sin(\omega t) = I_o \sin(\omega t). \quad (9.21)$$

Струја кроз калем осцилује истом фреквенцијом као и прикључени напон, али је фазно померена у односу на напон. Једначина (9.21) може се написати у облику:

$$i = I_o \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}). \quad (9.22)$$

Види се да струја заостаје у фази за напоном за $\pi/2$. Ово заостајање струје за напоном у индуктивном отпору настаје због ЕМС самоиндукције, која спречава промену струје у колу. На слици 9.5 приказан је векторски дијаграм струје и напона у колу са индуктивним отпором.



Слика 9.5.

Из једначине (9.22) види се да је:

$$I_o = \frac{U_o}{\omega L} = \frac{U_o}{R_L}, \quad (9.23)$$

односно:

$$R_L = \omega L, \quad (9.24)$$

где величина R_L представља индуктивни отпор. Индуктивни отпор је линеарна функција фреквенције и отпор расте кад фреквенција расте. Код веће фреквенције брже се мења струја у колу због чега расте ЕМС самоиндукције и индуктивни отпор постаје већи. За једносмерну струју, када је $\omega = 0$, индуктивни отпор је једнак нули.

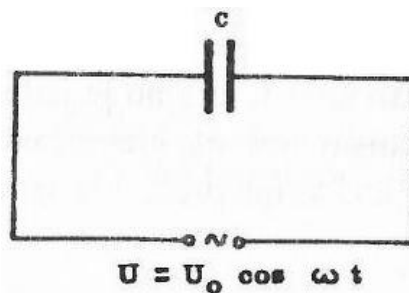
9.4. Капацитивни отпор у колу наизменичне струје

На слици 9.6 приказано је коло са кондензатором капацитета C и занемарљивог омског и индуктивног отпора ($R = 0$, $R_L = 0$), коме је прикључен извор наизменичног напона, једначина (9.15). У том случају кондензатор се наизменично пуни и празни и за то време кроз коло тече наизменична струја. Напон на кондензатору:

$$u_c = \frac{q}{C}, \quad (9.25)$$

једнак спољашњем прикљученом напону:

$$u_c = u. \quad (9.26)$$



Слика 9.6.

Заменом вредности за u и u_c добија се:

$$q = CU_0 \cos(\omega t) = q_0 \cos(\omega t), \quad (9.27)$$

где је q количина наелектрисања на кондензатору у било ком тренутку времена. Наелектрисање на облогама кондензатора осцилује у току времена са истом фреквенцијом као и прикључени напон. Јачина струје у колу је:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\omega CU_0 \sin(\omega t) = -\frac{U_0}{\frac{1}{\omega C}} \sin(\omega t). \quad (9.28)$$

Знајући да је:

$$\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\omega t) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega t), \quad (9.29)$$

једначина (9.28) може се написати у облику:

$$i = \frac{U_0}{\frac{1}{\omega C}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \quad (9.30)$$

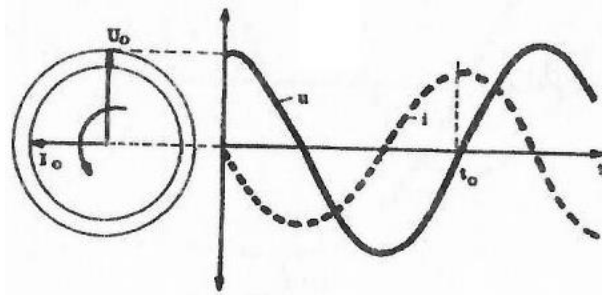
где је:

$$I_0 = \omega CU_0 = \frac{U_0}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_0}{R_C}, \quad (9.31)$$

максимална вредност струје. Величина:

$$R_C = \frac{1}{\omega C}, \quad (9.32)$$

преставља капацитивни отпор кондензатора. Капацитивни отпор обрнуто је пропорционала капацитету кондензатора и фреквенције наизменичне струје. Поређењем једначина (9.15) и (9.16) види се да је струја померена у фази испред напона за $\pi/2$. На слици 9.7 приказан је векторски дијаграм струје и напона у колу са капацитивним отпором.

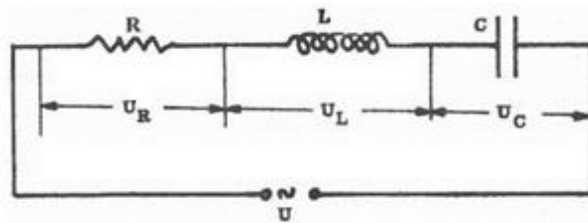


Слика 9.7.

9.5. Коло са омским, индуктивним и капацитивним отпором

На слици 9.8 приказано је коло у коме су серијски везани омски, индуктивни и капацитивни отпор прикључени за извор наизменичног напона:

$$u = U_o \sin(\omega t). \quad (9.33)$$



Слика 9.8.

Наизменична струја при проласку кроз калем изазива појаву ЕМС самоиндукције:

$$\varepsilon_s = -L \frac{di}{dt}. \quad (9.34)$$

На основу другог Кирхофовог правила збир електромоторних сила у неком затвореном колу једнак је збиру падова напона:

$$u + \varepsilon_s = Ri + \frac{q}{C}, \quad (9.35)$$

односно:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = U_o \sin(\omega t). \quad (9.36)$$

Дељењем једначина (9.36) са L и диференцирањем по времену добија се:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{\omega U_0}{L} \cos(\omega t). \quad (9.37)$$

Решење диференцијалне једначине (9.37) има облик:

$$i = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad (9.38)$$

где су:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (9.39)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (9.40)$$

Величина φ представља фазну разлику измеђи струје и напона. Према једначини (9.39) укупни отпор кола или импеданца је:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \quad (9.41)$$

Када год у колу постоји реактивни отпор:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad (9.42)$$

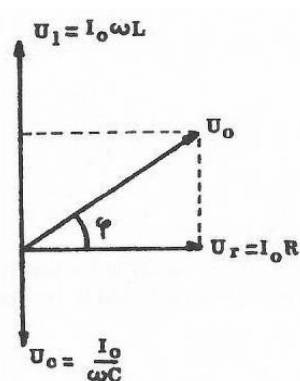
струја и напон су фазно померени. Ако прикључени напон има синусни облик онда и резултујућа струја има исти облик и осцилује са истом фреквенцијом као и напон само је фазно померен. Знак померања зависи од релативних величина индуктивног и капацитивног отпора. Када је:

$$\omega L > \frac{1}{\omega C}, \quad (9.43)$$

тада је $\varphi > 0$, и струја заостаје у фази иза напона. У случају када је:

$$\omega L < \frac{1}{\omega C}, \quad (9.44)$$

тада је $\varphi < 0$, и струја је фазно померена испред напона. За коло са слике 9.8 струја је заједничка за све елементе па је корисно импеданцу кола приказати у облику дијаграма, као на слици 9.9



Слика 9.9.

Када је реактивни отпор кола једнак нули:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad (9.45)$$

тада је $\varphi = 0$ и струја је у фази са напонам. У том случају импеданца кола је минимална, а струја максимална и кажемо да је коло у резонанци са извором струје. Резонантна фреквенција је према томе:

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (9.46)$$

9.6. Снага наизменичне струје

У сваком реалном колу наизменичне струје поред омског отпора постоји и индуктивни и капацитивни отпор. Зато је струја фазно померена у односу на напон за неки угао φ :

$$u = U_o \cos(\omega t), \quad (9.47)$$

$$i = I_o \cos(\omega t - \varphi). \quad (9.48)$$

Рад који изврши струја у колу за време dt је:

$$dA = iudt = I_o U_o \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) dt, \quad (9.49)$$

односно снага:

$$P(t) = \frac{dA}{dt} = I_o U_o \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi). \quad (9.50)$$

Користећи познати тригонометријски идентитет:

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)], \quad (9.51)$$

може се писати да је $\alpha = \omega t$ и $\beta = \omega t - \varphi$, одакле се добија да је $\alpha - \beta = \varphi$ и $\alpha + \beta = 2\omega t - \varphi$.

Зато је:

$$\cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi)], \quad (9.52)$$

и заменом једначине (9.52) у једначину (9.50) добија се:

$$P(t) = \frac{1}{2} I_o U_o [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi)]. \quad (9.53)$$

Једначина (9.53) представља тренутну вредност снаге електричне струје у функцији времена. Средња вредност ове снаге је:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{T} \frac{1}{2} I_o U_o \int_0^T [\cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \varphi)] dt. \quad (9.54)$$

Интеграл другог члана подинтегралне функције једнак је нули, тако да је:

$$P = \frac{1}{2} I_o U_o \cos(\varphi), \quad (9.55)$$

или у функцији ефективне вредности:

$$P = IU \cos(\varphi). \quad (9.56)$$

Величина $\cos(\varphi)$ назива се фактор снаге:

$$\cos(\varphi) = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Када је реактивни отпор $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ једнак нули, онда је $\varphi = 0$, односно $\cos(\varphi) = 1$, па је снага максимална $P = IU$. Међутим, када у колу постоји само реактивни отпор ($R = 0$), онда је $\cos(\varphi) = 0$, па је и средња издвојена снага у колу једнака нули. У том случају може се показати да је тренутна снага наизменичне струје:

$$P(t) = I_o U_o \sin(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} I_o U_o \sin(2\omega t) = IU \sin(2\omega t). \quad (9.57)$$

Дакле, тренутна вредност снаге наизменичне струје, у колу са чистим реактивним отпором, осцилује са двоструком фреквенцијом струје или напона. Тада за време од једне четвртине периода струје (кад струја расте од нулте вредности) енергија се из извора доводи у коло, а у следећој четвртини периода исти се износ енергије враћа из кола у узвор. То практично значи да енергија, доведена кондензатору или индуктивном калему, одлази на грађење електричног или магнетног поља, а сва ова енергија се враћа касније, кад поље опада на нулу.