

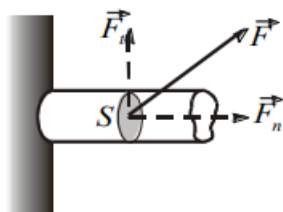
3. ОСНОВЕ МЕХАНИКЕ НЕПРЕКИДНИХ СРЕДИНА

3.1. Механика еластичних тела. Хуков закон.

Под дејством спољашњих сила реална тела се деформишу-мењају димензије. Ако деформација по престанку дејства сила исчезне тело називамо еластичним, у противном је пластично. Дејство спољашњих сила на еластично тело изазива у њему као реакцију противдејство еластичних сила, које теже да га врате у првобитан облик.

При дејству спољашње силе \vec{F} на тело, слика 3.1, у сваком пресеку тела, њена нормална компонента \vec{F}_n и тангенцијална компонента \vec{F}_t су изједначене са одговарајућим компонентама унутрашњих еластичних сила, и тада се тело налази у напругнутом стању. То стање карактерише се физичком величином чија је бројна вредност једнака односу еластичне силе \vec{F} и површине попречног пресека S и назива се напон:

$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ или } \sigma = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (3.1)$$



Слика 3.1. Дејство спољашње силе на еластично тело

Како сила \vec{F} на тело има нормалну компоненту \vec{F}_n и тангенцијалну компонента \vec{F}_t у односу на површину пресека S , постоји нормални и тангенцијални напони, дефинисани:

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S} \text{ или } \sigma_n = \frac{\Delta F_n}{\Delta S} \quad (3.2)$$

$$\sigma_t = \frac{F_t}{S} \text{ или } \sigma_t = \frac{\Delta F_t}{\Delta S}. \quad (3.3)$$

Овако дефинисан напон назива се средњи напон. Смањивањем површине ΔS до елементарне долазимо до напона на елементу површине тела:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}, \quad (3.4)$$

где је σ напон на елементу.

Величина деформације тела било по облику или запремини изражава се релативном деформацијом, као односом апсолутне деформације ΔV и првобитне величине тела V :

$$\delta = \pm \frac{\Delta V}{V}, \quad (3.5)$$

где се знак $+$ односи на ширење, а знак $-$ на сабијање тела. Релативна деформација представља апсолутну деформацију по јединици одговарајуће димензије тела, и то је неименован број као две физичке величине исте природе.

Енглески физичак Хук је експериментално установио да је напон пропорционалан релативној деформацији:

$$\sigma = E \cdot \delta, \quad (3.6)$$

где је E модул еластичности тела. Реципрочна вредност модула еластичности се назива коефицијент еластичности. Напон σ_p при коме Хуков закон пропорционалности не важи назива се гранични напон пропорционалности.

3.1.1. Еластичне дужинске деформације

Посматрајмо изотропну жицу константног попречног пресека S и дужине l , која се истезе под дејством силе \vec{F} чији се правац поклапа са осом жице (слика 3.2). Нека се жице издужи за Δl . У том случају је релативна деформација је:

$$\delta = \frac{\Delta l}{l}, \quad (3.7)$$

а Хуков закон је облика:

$$\sigma_n = E_y \delta, \quad (3.8)$$

где је E_y – Јунгов модул еластичности и односи се на дужинске (лонгитудиналне) деформације. Једначина (3.8) може се написати у облику:

$$F = \frac{E_y S}{l} \Delta l = k \Delta l. \quad (3.9)$$

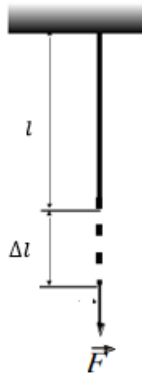
Дакле, апсолутно издужење је пропорционално спољашњој сили. Ако је $\Delta l = l$, тада је $E_y = F/S = \sigma$, из чега следи да E_y има димензије напона. Према томе Јунгов модул је једнак напону који би дужину жице удвостручио, уколико би за тако велике деформације важио Хуков закон. Реципрочна вредност E_y назива се коефицијент еластичности e .

Растезање или сабијање жице изазива промену њених попречних димензија:

$$\delta_d = -\frac{\Delta d}{d}, \quad (3.10)$$

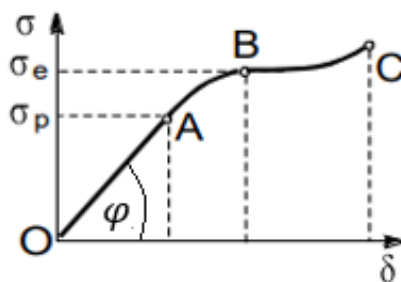
где је d дијаметар жице, а Δd апсолутна величина његове промене при истезању. Однос попречне (трансверзалне) и уздужне (лонгитудиналне) релативне деформације назива се Поасоновим коефицијентом:

$$\mu = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta l}{l}} = -\frac{\Delta d}{\Delta l} \cdot \frac{l}{d}. \quad (3.11)$$



Слика 3.2. Истежање

Дијаграм напона је график зависности напона σ од релативне деформације δ неког материјала (слика 3.3). Порастом напона и сходно томе порастом релативне деформације до тачке A на графику важи Хуков закон пропорционалности, из чега се може одредити Јунгов модул, $E_y = \text{tg}(\varphi)$. Даљим порастом од тачке A до тачке B тело је још увек еластично, али по некој другој нелинеарној зависности. Од тачке B до C деформација је пластична. По престанку дејства спољашње силе тело се не враћа у првобитан облик. У тачки C долази до кидања тела. Вредност напона у тачки A се назива граница пропорционалности σ_p , а у тачки B граница еластичности σ_e .



Слика 3.3. Зависност напона од релативне деформације

3.1.2. Еластична деформација смицањем

Смицање је еластична деформација под дејством спрега тангенцијалних сила и манифестује се паралелним померањем слојева тела, као што је то приказано на слици 3.4. Доња учвршћена равна тела је равна смицања а између било која два слоја влада тангенциони напон једнак:

$$\sigma_t = \frac{F}{S}, \quad (3.12)$$

где је S додирна површина слојева. Релативна деформација за сваки слој се изражава на следећи начин:

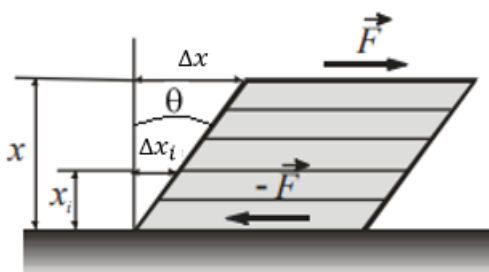
$$\frac{\Delta x_i}{x_i} = \frac{\Delta x}{x} = \operatorname{tg}(\theta) \approx \theta, \quad (3.13)$$

за мале вредности θ . По Хуковом закону релативна деформација је сразмерна тангенцијалном напону, па добијамо:

$$\sigma_t = \frac{F}{S} = G \frac{\Delta x}{x} = G\theta, \quad (3.14)$$

где је G модул смицања материјала. Из једначине (3.14) се види да овај модул има исте димензије и јединице као и Јунгов модул. Јунгов модул, модул смицања и Поасонов коефицијент повезани су међусобно односом за једно тело:

$$G = \frac{E_y}{2(1+\mu)}. \quad (3.15)$$

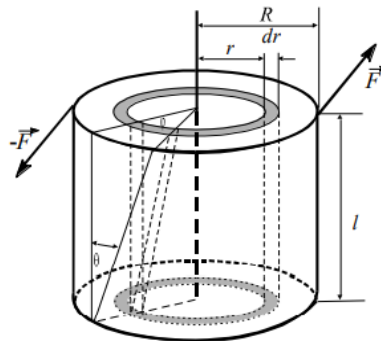


Слика 3.4. Смицање

3.1.3. Еластична деформација увртања (торзије)

Торзија (увртање) је специјалан случај смицања и често се јавља код осовина разних машина. Пример торзије једног ваљкастог тела приказан је на слици 3.5. Нека момент \vec{M} , спрега сила \vec{F} и $-\vec{F}$ делује у нивоу горњег базиса, док је доњи базис тела учвршћен. Пошто силе имају тангенцијални правац у односу на површину S попречног пресека ваљка, оне условљавају тангенцијални напон σ_t , који је у центру површине

једнак нули и расте према периферији. Пропорционално напону σ_t настају релативна померања сваког слоја ваљка у односу на његове суседне слојеве.



Слика 3.5. Торзија

Уочимо један елемент ваљка, слој на растојању r од осе ваљка дебљине dr . На површину слоја $dS = 2\pi r dr$ дејствује сила dF која изазива тангенцијални напон:

$$\sigma_t = \frac{dF}{dS} = \frac{dF}{2\pi r dr}. \quad (3.16)$$

Под дејством момента спрега $dM = r dF$ долази до увртања овог слоја. Ако би се овај слој развио у једну равну констатовало би се да је он после деформисања од правоугаоника прешао у трапезоид, па се може закључити да је у ствари дошло до његовог смицања, тако да је релативна деформација:

$$\delta = \operatorname{tg}(\theta) \approx \theta = \frac{r\varphi}{l}. \quad (3.17)$$

Применом Хуковог закона за деформацију смицања на овом слоју долазимо до следећег израза:

$$\frac{dF}{2\pi r dr} = G \frac{r\varphi}{l}. \quad (3.18)$$

Момент силе dF у односу на осу ваљка биће:

$$dM = r dF = \frac{2\pi G \varphi}{l} r^3 dr. \quad (3.19)$$

Укупни момент силе на горњем базису ваљка добија се интеграцијом овог израза по r у границама од 0 до R :

$$M = \frac{2\pi G \varphi}{l} \int_0^R r^3 dr = G \frac{\pi \varphi}{2l} R^4. \quad (3.20)$$

Однос између момента силе M и угла увртања φ назива се торзиона константа:

$$C = \frac{M}{\varphi} = \frac{\pi G}{2l} R^4 = \text{const}. \quad (3.21)$$

3.1.4. Енергија еластичне деформације

При деформацији тела спољашње силе над њим врше рад. Извршени рад прелази у потенцијалну енергију деформације. Овом енергијом еластичне силе враћају тело у првобитан положај по престанку дејства спољашњих сила. Извршени рад при истезању еластичне жице, на основу ранијег излагања биће:

$$dA = Fd(\Delta l) = E_y \delta S d(\Delta l) = E_y S \frac{\Delta l}{l} d(\Delta l), \quad (3.22)$$

где је Δl промењиво издужење жице у границама од 0 до Δl_0 . Укупан рад силе за коначно издужење жице је:

$$A = \frac{E_y S}{l} \int_0^{\Delta l_0} \Delta l d(\Delta l) = \frac{E_y S}{2l} \Delta l_0^2. \quad (3.23)$$

Овај рад спољашње силе еквивалентан је потенцијалној енергији еластично деформисане жице:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{E_y S}{l} \Delta l_0^2 = E_y \frac{Sl}{2} \delta_0^2 = E_y \frac{V}{2} \delta_0^2, \quad (3.24)$$

где је V запремина жице. Дакле, потенцијална енергија еластичне деформације жице пропорционална је квадрату крајње или максималне деформације. Однос потенцијалне енергије и запремине тела назива се густина енергије деформације или енергија јединице запремине деформисаног тела и износи за истезање:

$$\rho_u = \frac{U}{V} = \frac{E_y \delta_0^2}{2}, \quad (3.25)$$

а за смицање:

$$\rho_u = \frac{U}{V} = \frac{G \cdot \theta_0^2}{2}. \quad (3.26)$$

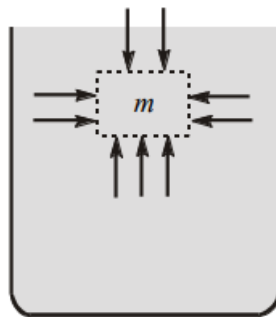
Дакле, густина енергије еластичне деформације тела пропорционална је квадрату крајње релативне деформације.

3.2. Механика флуида

Флуидима се називају течности и гасови. Механика флуида је део механике која се бави проучавањем закона равнотеже и кретања течности и гасова. У механици флуида занемарује се структурна својства течности и гасова и сматрају се као непрекидне средине непрекидно распоређене у простору. Флуиди могу да теку и мењају облик под дејством врло малих сила, за разлику од чврстих тела. Течности, при томе, имају сталну запремину. Гасови су, за разлику од њих, стишљиви. При томе течност не одржава сталан облик када тече већ само запремину, за разлику од гасова

који немају ни сталан облик, ни сталну запремину. Течности су практично нестишљиве зато што им је густине константна, односне не зависи од притиска. Гасови су стишљиви и њихова густина зависи од притиска. Због ове особине разликујемо нестишљив и стишљив флуид.

Како су флуиди непрекидне средине они се мисаоно могу поделити на елементарне запремине чије су димензије довољно велике да не залазе у структуру флуида и довољно мале да се силе које дејствују на њих могу сматрати константним. Даље, део флуида или његов елемент се мисаоно могу заменити чврстим телом исте запремине, облика и густине као и разматрани део флуида. На овај начин се на флуид могу применити закони чврстог тела (поступак очвршћавања).



Слика 3.6. Поступак очвршћавања

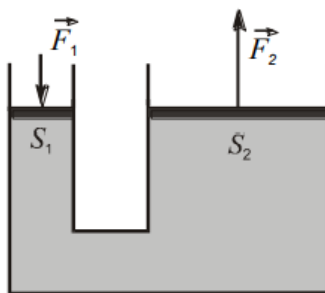
Као пример, на слици 3.6. је издвојен део течности масе m који се налази на површини. На њега са свих страна делују неке силе. Посматрани делић течности је у миру када су све силе уравнотежене. Унутрашње силе, у флуиду, су у принципу увек изједначене по принципу акције и реакције. Могуће спољашње силе су гравитациона $m\vec{g}$ и површинске силе, \vec{F}_p . Површинске силе потичу од дејства суседних делова течности у граничном слоју. Услов за мировање дела течности је да је резултанта спољашњих сила једнака нули, односно:

$$m\vec{g} + \vec{F}_p = 0. \quad (3.27)$$

Слободна површина течности се поставља, односно заузима положај нормално на правац дејства резултанте свих спољашњих сила. Како на течност на површини Земље делују гравитационе силе, ниво течности је хоризонталан јер је нормалан на \vec{g} . Пример за то је свака површина воде која мирује.

3.2.1. Паскалов закон

Паскалов закон говори о простирању притиска у флуидима. Ако се сила Земљине теже занемари, из услова равнотеже сила које делују на произвољни елемент запремине течности следи да је притисак у свим деловима течности константан. У супротном, разлика притисака између два произвољна елемента изазвала би дејство силе $\Delta p \cdot \Delta S$ која би покретала течност. Ова чињеница је изражена у Паскаловом закону: Притисак у произвољном делу мирне течности једнак је у свим правцима и преноси се подједнако по целој запремини. Паскалов закон се користи у многим техничким уређајима, омогућујући да се дејство силе подешава по правцу и интензитету. На слици 3.7 приказан је принцип рада хидрауличне пресе.



Слика 3.6. Хидраулична преса

Како је притисак у течности константан, следи да је:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = p = \text{const.} \quad (3.28)$$

односно:

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1. \quad (3.29)$$

На тај начин се на клипу S_2 , уколико је пресек знатно већи од S_1 , може добити знатно већа сила, па се уређај користи и као хидраулична дизалица.

3.2.2. Расподела притиска у мирној течности. Нестишљив флуид

За нестишљив флуид је карактеристично да му је густина стална:

$$\rho = \frac{dm}{dV} = \text{const.} \quad (3.30)$$

без обзира на притисак и спољашње услове. У реалним условима на флуид делује сила Земљине теже. На ниже слојеве течности слојеви изнад њих делују својом тежином, па се стога притисак мења по дубини. Сила F_2 ће бити већа од силе F_1 за износ тежине уочене запремине флуида на слици 3.7. Услов за мировање уочене запремине је равнотежа сила је:

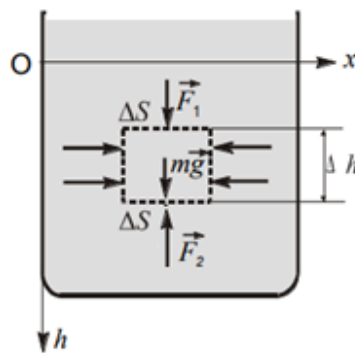
$$p_1\Delta S + mg = p_2\Delta S, \quad (3.31)$$

односно:

$$p_1\Delta S + \rho g\Delta h\Delta S = p_2\Delta S. \quad (3.32)$$

Из једначине (3.32) следи да је:

$$\rho g\Delta h = p_2 - p_1 = \Delta p. \quad (3.33)$$



Слика 3.7. Притисак у течности

Смањивањем димензија уоченог елемента до врло малих вредности, једначина (3.33) постаје:

$$dp = \rho g dh. \quad (3.34)$$

Интеграљењем једначине (3.34) добија се:

$$\int_{p_0}^p dp = \rho g \int_0^h dh \quad (3.35)$$

односно:

$$p - p_0 = \rho gh, \quad (3.36)$$

где је h дубина течностиу односу на њену слободну површину, а p_0 спољашњи притисак на ту површину. Дакле, притисак течности се повећава линеарно са дубином. Једначина (3.36) је основна једначина хидростатике за нестишљиве флуиде из које се могу извести следећи закључци:

а) Притисак је једнак у свим тачкама на истој дубини h . Површине са истим притиском се називају изобарним површинама. Свака слободна површина течности је изобарна.

- б) Облик суда не утиче на притисак.
- ц) Разлика притисака на два нивоа једнака је тежини вертикалног стуба течности јединичног пресека.
- д) Разлика притисака на два нивоа не зависи од спољашњег притиска p_o . Ово је директна последица Паскаловог закона.
- е) Слободне површине у спојеним судовима имају исте нивое. Ако се течности не мешају у спојеним судовима нивои ће се односити обрнуто густинама течности:

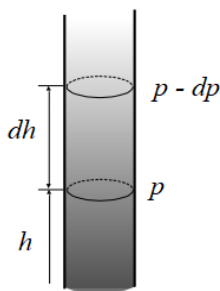
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}. \quad (3.37)$$

3.2.3. Расподела притиска у гасу. Стишљив флуид. Барометарска формула

Гасови, за разлику од течности, немају сталну запремину. Заузимају облик и запремину суда у коме се налазе и услед тога немају слободну површину. Гасови су стишљиви и имају малу густину, која зависи од притиска и температуре гаса. Последица тога је чињеница да се притисак у гасовима не мења линеарно са висином, као код течности. Да би смо размотрили понашање притиска у гасовима поћићемо од Бојл-Мариотовог закона који гласи да је, за изотермну средину (константна температура), производ притиска и запремине исте количине гаса константан: $pV = p_o V_o = \text{const}$. Одавде се може изразити зависност густине од притиска:

$$\rho(p) = \frac{m}{V} = \frac{m}{p_o V_o} p = \rho_o \frac{p}{p_o}, \quad (3.38)$$

где су ρ_o и p_o густина и притисак гаса на нултом нивоу (дно суда у коме се налази гас). Притисак гаса на некој висини h проузрокован је тежином слојева гаса изнад те висине, јер се гас налази под дејством силе теже. Посматрајмо гас у замишљеном вертикалном цилиндру, као на слици 3.8. Нека је на некој висини h притисак гаса p , онда ће на висини $h + dh$ притисак гаса бити $p - dp$, зато што се притисак гаса смањује са прираштајем висине.



Слика 3.7. Гас у гравитационом пољу

Из услова равнотеже ученог елемента гаса у облику цилиндра висине dh и јединичног попречног пресека, разлика притисака између горње и доње основе биће:

$$-dp = \rho(p)gdh, \quad (3.39)$$

где је $\rho(p)$ густина гаса на висини h где је притисак p . На основу једначина (3.38) и (3.39) добијамо:

$$-dp = \frac{\rho_0 g}{p_0} p dh, \quad (3.40)$$

односно:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dh. \quad (3.41)$$

Промена притиска за неку висину h , добија се интегралњем једначине (3.41):

$$\int_{p_0}^{p_h} \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} \int_{h_0}^h dh, \quad (3.42)$$

$$\ln \frac{p_h}{p_0} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} (h - h_0), \quad (3.43)$$

$$p_h = p_0 \exp \left[-\frac{\rho_0 g}{p_0} (h - h_0) \right]. \quad (3.44)$$

Једначина (3.44) представља аеростатички закон за идеалне, мирне и изотермске гасове и назива се барометарска формула. Притисак гаса експоненцијално опада са висином и то утолико брже уколико је густина гаса већа, а почетни притисак p_0 мањи. Ово се може приближно применити и на атмосферу Земље, зато што атмосфера није миран изотермски гас. Атмосферски притисак зависи од надморске висине, и уколико се мери у односу на њену површину ($h_0 = 0$), где је притисак p_0 , једначина (3.44) постаје:

$$p_h = p_0 \exp \left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} h \right). \quad (3.45)$$

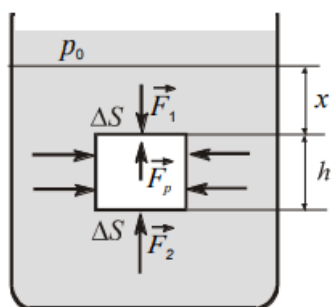
3.2.4. Архимедов закон

Због промене притиска са висином флуида на зароњено стране тело делује сила потиска или Архимедова сила једнака разлици сила притисака на доњој и горњој површини тела. За случај илустрован на слици 3.8, сила потиска се може изразити на следећи начин:

$$F_p = F_2 - F_1 = p_2 \Delta S - p_1 \Delta S. \quad (3.46)$$

На основу једначине (3.36), претходна једначина се може написати у облику:

$$F_p = [p_0 + \rho g(x + h)] \Delta S - (p_0 + \rho g x) \Delta S = \rho g h \Delta S = \rho g \Delta V = g \Delta m = \Delta Q. \quad (3.47)$$



Слика 3.8. Сила потиска

Дакле, сила потиска бројно је једнака тежини телом истиснутог флуида. Ова сила има вертикални правац и пролази кроз центар масе запремине истиснутог флуида. Архимедов закон има значајну улогу у понашању страних тела у течностима. Ако је $F_p > Q$, тело ће пливати на површини течности, без обзира на своју густину. При томе је пресудна запремина тела. Битан је и услов да при пливању тела његово тежиште мора да буде испод нападне тачке силе потиска, како спрег ових сила не би изазвао превртање тела.

3.2.5. Мерење притиска

Уређаји за мерење притиска се називају манометри. Постоји више типова манометара, а неки од њих су:

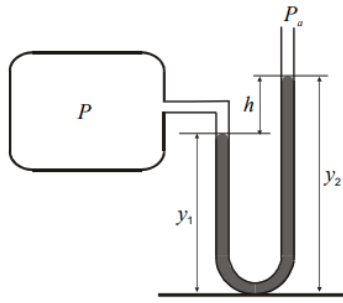
а) Манометар са отвореном цеви је најједноставнији тип манометра и приказан је на слици 3.9. На посуду у којој се притисак мери настављена је савитљива цев у облику слова U испуњена течношћу густине ρ -обично живом. Сама цев је у ствари манометар. Услов да жива на одговарајућим нивоима у крајевима цеви мирује је да су притисци у њеном левом и десном краку изједначени:

$$p + \rho g y_1 = p_a + \rho g y_2, \quad (3.48)$$

односно:

$$p - p_a = \rho g (y_2 - y_1) = \rho g h, \quad (3.49)$$

где су p_a - атмосферски, познат притисак, p је тзв. апсолутни, а $p - p_a$ релативни притисак, који се мери.

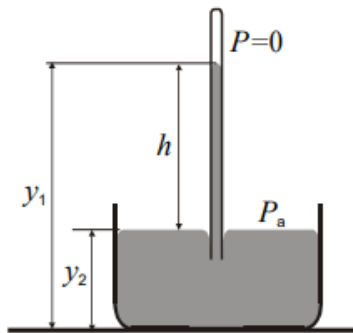


Слика 3.9. Отворени U манометар

б) Торичелијев манометар служи за мерење атмосферског притиска на начин приказан на слици 3.10. Стаклена цев, дужа од 1 m се напуни живом, окрене и зарони отвореним крајем у већу посуду са живом. Ниво живе у цеви ће се спустити док се притисак живиног стуба не изједначи са атмосферским притиском на слободној површини живе у суду. Тада је:

$$p_a = \rho g(y_1 - y_2) = \rho gh. \quad (3.50)$$

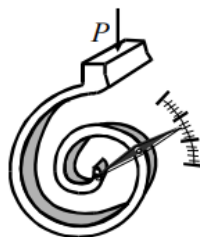
На основу једначине (3.50) може се изразити притисак који одговара једном милиметру живиног стуба, обзиром да се ова величина често узима за јединицу притиска. Заменом одговарајућих вредности биће: $1 \text{ mmHg} = 13.6 \cdot 9.81 \cdot 0.001 \text{ Pa} = 133.3 \text{ Pa}$.



Слика 3.10. Торичелијев манометар

ц) Бурдонов манометар се најчешће примењује у техници и састоји се од спиралне еластичне цеви пљоснатих зидова, као на слици 3.11. Спољашња страна цеви има већу површину од унутрашње стране, због већег радијуса кривине, па је сила притиска, $F = PS$, на њу већа него на унутрашњи зид цеви. Последица тога је исправљање цеви чиме се покреће казаљка прикачена на њеном крају и непокретном ослонцу. Скала, која је претходно калибрисана, на тај начин показује притисак гаса у суду на који је

манометар прикачен. Овај манометар служи за мерење притисака већих од атмосферског.

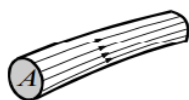


Слика 3.11. Метални манометар

3.2.6. Кретање идеалне течности. Једначина континуитета

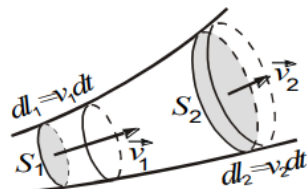
Област физике која проучава законитости кретања флуида назива се динамика флуида, а посебно када су у питању течности назива се хидродинамика. Према понашању флуида у току кретања можемо их поделити на идеалне и вискозне.

Идеални, или исправније идеализовани флуиди су нестишљиви, дакле то су течности и не испољавају унутрашње трење или вискозност. Овакви флуиди практично не постоје, али неки, као што је рецимо вода, имају занемарљив унутрашњи отпор, па се могу сматрати идеалним. За кретање идеалних флуида карактеристична је линија тока односно путања којом се креће уочени елемент флуида. Брзина на линији тока је у општем случају променљива и по смеру и по интензитету. Струјање је стационарно када сваки елемент флуида који се нађе у једној тачки простора врши кретање по истој линији тока, са истом брзином и убрзањем. Линија струјања је крива чија је тангента у свакој тачки усмерена у правцу брзине флуида у тој тачки. Код стационарног струјања, линија струјања се поклапа са линијом тока. Све линије струјања које пролазе кроз периферију једног површинског елемента A , чине струјну цев, слика 9.17. При стационарном струјању флуид не може да изађе из струјне цеви нити да у њу уђе. Струјне линије и струјне цеви при кретању флуида могу се посматрати упуштањем обојених млазева тешности или ситних честица које у њој пливају. Основне законитости при кретању идеалних флуида изражене су једначином континуитета и Бернулијевом једначином.



Слика 3.12. Струјна цев

Једначина континуитета је последица закона одржања масе у затвореној запремини флуида. Посматрајмо кретање флуида кроз једну струјну цев различитог пресека, као што је то приказано на слици 3.13.



Слика 3.13. Једначина континуитета

Кроз произвољне пресеке S_1 и S_2 флуид се креће брзинама v_1 и v_2 . Маса флуида која прође кроз један пресек је једнака производу из густине и запремине:

$$dm = \rho S v dt. \quad (3.51)$$

Масе течности које прођу кроз два уочена пресека биће међусобно једнаке:

$$dm_1 = dm_2, \quad (3.52)$$

односно:

$$\rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt. \quad (3.53)$$

Из једначине (3.53) следи да је:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (3.54)$$

што представља општи облик једначине континуитета. Дакле брзина струјања кроз одређени пресек струјне цеви обрнуто је пропорционална површини тог пресека. За стишљиве флуиде, односно гасове, једначина континуитета има другачији облик, односно:

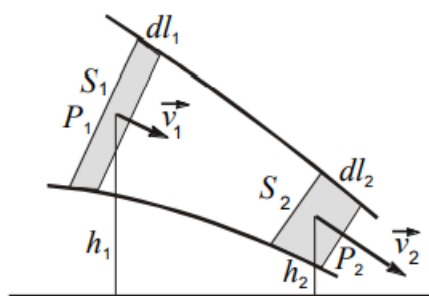
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.55)$$

и односи се на затворену површину флуида. Ознака "div" представља дивергенцију вектора, односно проток флуида кроз уочену површину. За $\rho = \text{const.}$ је $\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$, проток нестишљивог флуида кроз затворену површину је нула, колико флуида уђе толико и изађе.

3.2.7. Бернулијева једначина

За стационарно струјање идеалног, нестишљивог флуида дуж струјне цеви у гравитационом (потенцијалном) пољу, закон одржања механичке енергије изражава се

Бернулијевом једначином. Размотримо са енергијског становишта кретање флуида кроз струјну цев приказану на слици 3.14.



Слика 3.14. Бернулијева једначина

Нека флуид у тренутку t испуњава струјну цев ограничену нормалним пресецима S_1 и S_2 . Пресеци S_1 и S_2 су довољно мали да сви елементи флуида у пресеку S_1 имају брзину \vec{v}_1 , притисак p_1 и висину h_1 , а у пресеку S_2 имају брзину \vec{v}_2 , притисак p_2 и висину h_2 , у односу на неки референтни систем. Флуид се креће у назначеном смеру под дејством силе теже и силе притиска који делују на пресецима S_1 и S_2 . Силе притиска које делују на бочне зидове струјне цеви не утичу на кретања, јер су управне на површину струјне цеви. Маса флуида која за време dt протекне кроз било који пресек струјне цеви је:

$$dm = \rho S_1 v_1 dt = \rho S_2 v_2 dt. \quad (3.56)$$

Енергија уоченог елемента флуида је збир његове кинетичке и потенцијалне енергије, односно у пресецима S_1 и S_2 је:

$$E_1 = \frac{1}{2} dm v_1^2 + dm g h_1, \quad (3.57)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} dm v_2^2 + dm g h_2. \quad (3.58)$$

Разлика ових енергија dE једнака је раду спољашњих сила утрошеном на премештање елемента течности из пресека S_1 у пресек S_2 :

$$dE = d(E_k + U) = dE_k + dU = \delta A. \quad (3.59)$$

Извршен рад δA једнак је разлици радова сила притисака $\vec{F}_1 = p_1 S_1 \vec{n}_1$ и $\vec{F}_2 = p_2 S_2 \vec{n}_2$ које делују на пресецима S_1 и S_2 . Обзиром да се брзине поклапају са правцем нормала, извршени рад је:

$$\delta A = F_1 dl_1 - F_2 dl_2 = p_1 S_1 v_1 dt - p_2 S_2 v_2 dt = (p_1 - p_2) S_1 v_1 dt, \quad (3.60)$$

зато што је $S_1 v_1 = S_2 v_2$. Промена кинетичке и потенцијалне енергије елемента флуида у пресецима S_1 и S_2 су:

$$dE_k = \frac{1}{2} dm(v_2^2 - v_1^2), \quad (3.61)$$

$$dU = dm g(h_2 - h_1), \quad (3.62)$$

тако да се једначина (3.59) може написати у облику:

$$\frac{1}{2} dm(v_2^2 - v_1^2) + dm g(h_2 - h_1) = (p_1 - p_2) S_1 v_1 dt. \quad (3.63)$$

Из једначина (3.56) и (3.63) следи да је:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2. \quad (3.64)$$

Пошто су S_1 и S_2 изабрани произвољно, за сваки пресек струјне цеви важи:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const}. \quad (3.65)$$

Једначина (3.65) је Бернулијева једначина. Сви чланови у овој једначини имају димензије притиска (F/S) или специфичне енергије, односно густине енергије (E/V). Због тога ови чланови имају двоструку интерпретацију: p - притисак у датом пресеку струјне цеви / рад силе притиска над јединичном запремином. $\frac{\rho v^2}{2}$ - динамички притисак / кинетичка енергија јединице запремине. $\rho g h$ - хидростатички притисак / потенцијална енергија јединичне запремине. Бернулијева једначина се примењује за израчунавања параметара кретања флуида.

Из једначине (3.64) следе специјални облици Бернулијеве једначине:

а) ако је $v_1 = v_2$, тада је:

$$p_2 - p_1 = \rho g(h_1 - h_2). \quad (3.66)$$

односно, разлика притисака у два пресека струјне цеви једнака је притиску тежине стуба флуида ограниченог овим пресецима. Расподела притисака у равномерном току флуида је иста као и у мирном флуиду.

б) ако је $v_1 \neq v_2$ и $h_1 \neq h_2$, тада је:

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho(v_1^2 - v_2^2)}{2} + \rho g(h_1 - h_2). \quad (3.67)$$

односно, при промењивој брзини струјања флуида дуж струјне цеви у њој се мења расподела притисака у односу на расподелу притисака мирног флуида. Притисак опада када брзина струјања расте ($v_2 > v_1$) и обрнуто.

ц) ако је $h_1 = h_2$, односно за хоризонтално струјање важи:

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho(v_1^2 - v_2^2)}{2}. \quad (3.68)$$

односно, разлика притиска у различитим пресецима струјне цеви, условљена је променом брзине струјања флуида. У местима сужења струјне цеви брзина струјања флуида расте, а статички притисак опада и обрнуто.

3.2.8. Примена Бернулијеве једначине

Помоћу Бернулијеве једначине једноставно се решавају сложени задаци струјања течности, ако се њена запремина може разложити на низ струјних цеви, или ако се цела покретна течност може сматрати као струјна цев, и ако су познате вредности притиска p_0 , брзине v_0 висине h_0 неког нивоа струјне цеви означеног као почетни.

а) Брзина истицања течности. Торичелијева теорема

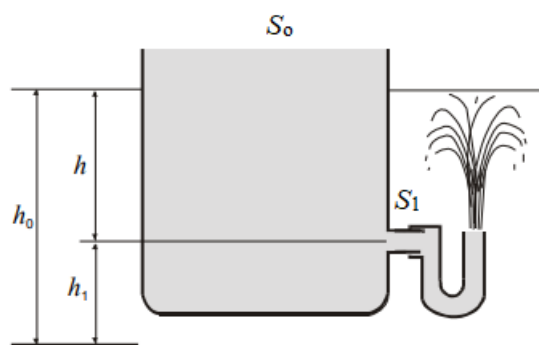
Размотримо пример истицања течности кроз отвор S_1 из отвореног суда велике запремине, као на слици 3.15. Посматрајмо целу запремину течности која се креће кроз једну цев и применимо једначину (3.64) на ниво слободне површине и ниво отвора:

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} + \rho g h_0 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1. \quad (3.69)$$

Претпостављајући да је $S_0 \gg S_1$, ниво S_0 ће се веома споро кретати, тако да је $v_0 = 0$, а $p_0 = p_1 = p_a$ (атмосферски притисак), једначина (3.69) постаје:

$$v_1^2 = 2g(h_0 - h_1) = 2gh. \quad (3.70)$$

Брзина v_1 назива се брзином истицања течности из суда и једнака је брзини коју би течност добила када би слободно пала од нивоа слободне површине до отвора суда (Торичелијева теорема). Како брзина струјања течности не зависи од правца струјања флуида и ако се струјање течности усмери вертикално навише, онда ће се млаз течности уздизати до нивоа слободне површине.



Слика 3.14. Торичелијева теорема

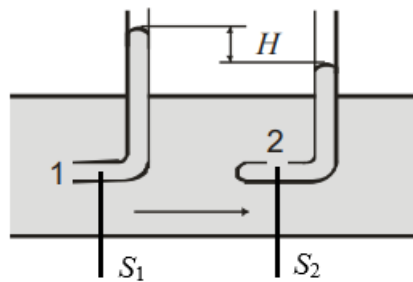
Брзина истицања течности под притиском $p > p_0$ је према једначини (3.69):

$$v_{1p}^2 = 2 \frac{p - p_0}{\rho} + 2gh. \quad (3.71)$$

б) Одређивање брзине струјања течност

На слици 3.15 приказана је Питова цев која служи за одређивање брзине течности. У пресеку S_1 течност је заустављена, њена брзина је струјања је $\vec{v}_1 = 0$, притисак p_1 и висина $h_1 = 0$. У пресеку S_2 течност има брзину струјања је \vec{v}_2 , притисак p_2 и висина $h_2 = 0$. Течност струји од пресека S_1 ка пресеку S_2 услед разлике притисака и зато је $p_1 > p_2$. Примењујући Бернулијеву једначину у пресецима S_1 и S_2 добија се:

$$p_1 - p_2 = \rho \frac{v_2^2}{2}. \quad (3.72)$$



Слика 3.15. Питова цев

Питова цев у пресеку S_1 показује укупан притисак (статички плус динамички), док сонда у пресеку S_2 показује само статички притисак. Разлика притисака $p_1 - p_2$ једнака је динамичком притиску чија се величина мери из разлике нивоа течности у Питовој цеви и сонди ΔH :

$$p_1 - p_2 = \rho g \Delta H. \quad (3.73)$$

и једначина (3.72) постаје:

$$v_2^2 = 2g \Delta H. \quad (3.74)$$

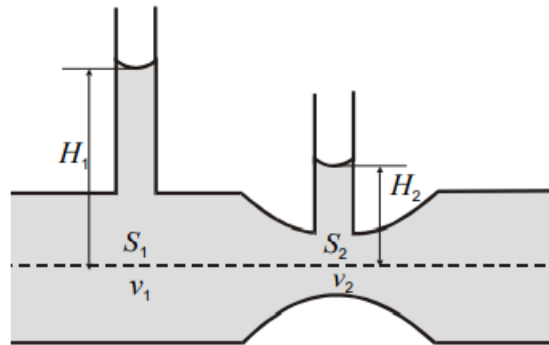
ц) Вентуријева цев (водомер)

На слици 3.16 приказана је Вентуријева цев. Уколико је позната величина попречних пресека у местима где се налазе манометарске цеви, тада се из разлике притисака може одредити количина течности која струји кроз цев у јединици времена – проток течности (Q). Примењујући Бернулијеву једначину у пресецима S_1 и S_2 добија се:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad (3.75)$$

односно:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2). \quad (3.76)$$



Слика 3.15. Вентуријева цев

Величину разлике притисака показује разлика нивоа течности у манометрима $H_1 - H_2$, односно:

$$p_1 - p_2 = \rho g (H_1 - H_2). \quad (3.77)$$

Из једначине континуитета или константности протока течности кроз ма који пресек струјне цеви добија се:

$$Q = S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (3.78)$$

Како је $S_1 > S_2$, тада је $v_1 < v_2$, па из једначине (3.75) следи да је $p_1 > p_2$. Из једначина (3.75), (3.76) и (3.77) следи да је:

$$\rho g (H_1 - H_2) = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{S_1 v_1}{S_2} \right)^2 - v_1^2 \right]. \quad (3.79)$$

односно:

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2g(H_1 - H_2)}{S_1^2 - S_2^2}}. \quad (3.80)$$

Проток течности према једначини (3.78) је:

$$Q = S_1 v_1 = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g(H_1 - H_2)}{S_1^2 - S_2^2}} = k \sqrt{H_1 - H_2}, \quad (3.81)$$

где је k константа Вентуријеве која се одређује експериментално. На овом принципу се врши мерење утрешка воде у цевима и такви инструменти се називају водомери.

При великим брзинама струјања, у случају Вентуријеве цеви или сличне конструкције, долази до знатног смањења притиска у суженом делу цеви, па чак и до усисавања ваздуха што изазива мешање ваздуха и течности у ситне капи после сужења. То се користи код тзв. пулверизатора, водених пумпи, као и код карбуратора мотора са унутрашњим сагоревањем.

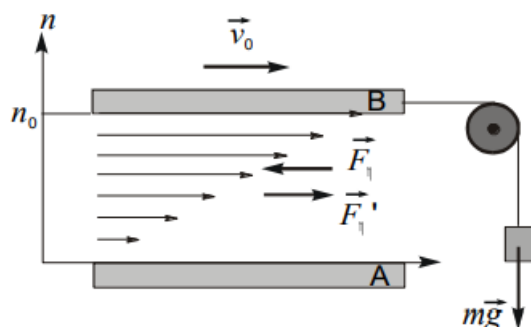
3.2.9. Динамика вискозних флуида

Вискозност је унутрашње трење флуида и манифестује се отпором који се јавља при кретању једног слоја флуида у односу на други. Реални флуиди су вискозни, код течности је вискозност више изражена него код гасова. Замислимо експеримент у коме су једна непокретна и једна покретна плоча потопљене у флуид, слика 3.16., и нека се покретна плоча креће под дејством силе \vec{F} . У почетку је кретање плоче B убрзано, све док се не постигне нека стационарна брзина \vec{v}_0 . Пошто се плоча више не убрзава под дејством спољашње силе, значи да постоји нека сила која је уравнотежује. То је сила трења \vec{F}_η , односно сила вискозности и очигледно је да она зависи од брзине кретања плоче B .

Ако се флуид између плоча мисаоно подели на танке паралелне слојеве-ламеле (ламинарно = слојевито или стационарно струјање), експериментално се може утврдити линеарна промена брзине слојева у правцу нормале \vec{n} на плоче тј. биће:

$$\frac{dv}{dn} = \frac{v_0}{n_0}, \quad (3.82)$$

где је n_0 размак између плоча. Дакле, кретање се преноси са слоја на слој све до доње плоче, и то преко међудејства слојева силама \vec{F}_η , (доњи на горњи) и \vec{F}'_η , (горњи на доњи).



Слика 3.16. Сила трења код ламинарног протицања

Варирањем брзине плочице \vec{v}_0 , површине плочице S и растојања између плочица n , експериментално је установљена зависност интензитета силе вискозног трења од поменутих фактора у облику:

$$F_\eta = \eta S \frac{dv}{dn}, \quad (3.83)$$

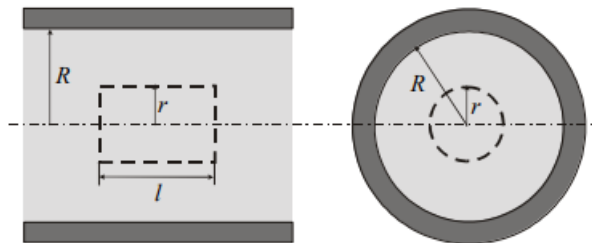
где је η коефицијент вискозног трења и који зависи од природе флуида и његове температуре. $\frac{dv}{dn}$ је модул градијента интензитета брзине у нормалном правцу на кретање флуида.

3.2.9. Протицање вискозне течности кроз уску цев

Флуиди се углавном крећу кроз цеви, па је интересантно видети каква је расподела брзина слојевитог (ламинарног) струјања вискозне нестишљиве течности у цилиндричној цеви малог полупречника R (слика 3.17). Замислимо издвојени део течности ограничен цилиндричном површином полупречника r и које се налазе на растојању l . На уочени елемент флуида у стационарном току деловаће сила вискозности $-\vec{F}_\eta$ и сила која потиче од разлике притисака p_1 и p_2 на крајевима цилиндра, због које се и креће. У стационарном режиму ове силе ће бити уравнотежене, па је:

$$p_1 r^2 \pi - p_2 r^2 \pi = -\eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}. \quad (3.84)$$

Негативан знак силе вискозног трења означава да је $\frac{dv}{dr} < 0$, односно да брзина v опада када r расте.



Слика 3.17. Флуид у цеви

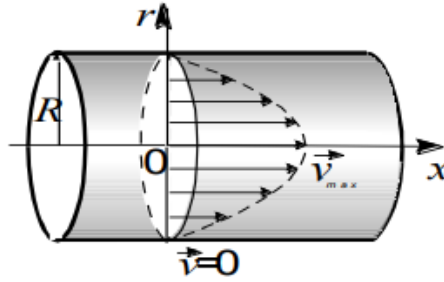
Једначина (3.84) може да се напише у облику:

$$dv = -\frac{(p_1 - p_2)}{2l\eta} r dr. \quad (3.85)$$

Интеграљењем једначине (3.85) по радијусу, у границама од $(R, v = 0)$ до (r, v) добија се:

$$v = -\frac{(p_1 - p_2)}{2l\eta} \int_R^r r dr = \frac{(p_1 - p_2)}{4l\eta} (R^2 - r^2). \quad (3.86)$$

Дакле, расподела брзина струјања вискозне течности је параболична функција растојања r од осе струјне цеви ка њеним зидовима (слика 3.18).



Слика 3.17. Расподела брзина у цеви

Максимална брзина струјања је дуж осе ($r = 0$) и износи:

$$v_{max} = \frac{(p_1 - p_2)}{4l\eta} R^2, \quad (3.87)$$

док је минимална вредност на зидовима струјне цеви и једнака је нули.

Помоћу закона расподеле брзина може се израчунати проток Q или запремина течности која прође кроз произвољни пресек цеви у јединици времена:

$$Q = \frac{dV}{dt}. \quad (3.88)$$

Елемент протока dQ кроз попречни пресек $dS = 2\pi r dr$ прстенастог струјног елемента износи $dQ = 2\pi r dr v$ (слика 3.16), где је v брзина струјана течности на растојању r , дата једначином (3.86). Проток течности кроз цео попречни пресек цеви једнак је интегралу по свим елементарним протоцима од $r = 0$ до $r = R$.

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^Q dQ = \int_0^R 2\pi r dr \frac{(p_1 - p_2)}{4l\eta} (R^2 - r^2) = \\ &= \frac{\pi(p_1 - p_2)}{2l\eta} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Ова једначина се назива Поазејев закон. По њему проток ламинарне вискозне течности је обрнуто пропорционалан коефицијенту вискозности η и сразмеран је четвртој степену полупречника цеви и величини $\frac{p_1 - p_2}{l}$.

Према једначини континуитета, проток је у свим пресецима цеви исти и не зависи од дужине l . Значи да је:

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad (3.90)$$

односно:

$$\frac{\pi(p_1 - p_2)}{8\eta l} R^4 = \text{const}. \quad (3.91)$$

Како је $\frac{\pi R^4}{8\eta}$ константно, онда је и $\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{\Delta p}{l}$ константно. $\frac{\Delta p}{l}$ је модул градијента притиска који показује равномерно опадање статичког притиска дуж струјне цеви константног пресека.

Дакле, притисак у струјној цеви опада са дужином цеви, што није био случај код идеалног флуида, где је према Бернулијевој једначини за $h_1 = h_2$ и $v_1 = v_2$, $p_1 = p_2$, односно $\Delta p = 0$. Овај резултат се примењује у разним експериментима за одређивање коефицијента вискозности. Оствалдов вискозиметар се заснива на мерењу времена t истицања истих запремина еталонске и непознате течности кроз исту капиларну вертикалну цев, висине h . Према једначини (3.89) добија се:

$$\frac{V}{t_o} = \frac{\pi R^4 \Delta p_o}{8l \eta_o}, \quad (3.91)$$

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8l \eta}, \quad (3.92)$$

одакле се добија да је:

$$\eta = \eta_o \frac{\Delta p}{\Delta p_o} \frac{t}{t_o} = \eta_o \frac{\rho g h}{\rho_o g h} \frac{t}{t_o} = \eta_o \frac{\rho}{\rho_o} \frac{t}{t_o}, \quad (3.93)$$

где су ρ и ρ_o густина непознате и еталонске течности.

3.2.10. Ламинарно и турбулентно струјање вискозних флуида

Ламинарно или слојевито струјање је оно у коме се могу одредити струјне линије и где свака тачка простора има једнозначно одређен вектор брзине струјања у сваком тренутку времена, што се математички изражава познавањем функције $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$. Ламинарно струјање се догађа при малим брзинама струјања и може бити стационарно и нестационарно.

Турбулентно кретање се карактерише енергичним мешањем слојева флуида и дешава се при великим брзинама струјања. Одликује се:

- а) непостојањем струјних линија и цеви,
- б) хаотичним кретањем целокупне масе флуида са образовањем локалних турбуленција (вртлога),
- ц) струјање је нестационарно,
- д) вредности брзине и притиска осцилују око неких средњих вредности, које се сада узимају као карактеристике кретања,
- е) пад притиска није линеарна, већ квадратна функција брзине (не важи Поазејев закон).

На основу експерименталног посматрања Рејнолдс је утврдио да карактер струјања вискозног флуида зависи од вредности једног бездимензионог броја који је дат са:

$$R_e = \frac{\rho \bar{v} R}{\eta} = \frac{\bar{v} R}{\nu}, \quad (3.94)$$

Где су: ρ – густина флуида, \bar{v} – средња брзина по попречном пресеку цеви у правцу струјања флуида и R – полупречник цеви. Рејнолдсов број зависи од односа ρ и η који карактерише својства флуида. Однос $\nu = \frac{\rho}{\eta}$ назива се кинематичка вискозност која потпуније карактерише улогу вискозности при струјању, него η , при осталим једнаким условима.

За мале вредности R_e струјање флуида је ламинарно. Са повећањем броја R_e и њему одговарајуће брзина \bar{v} мења се карактер струјања флуида. Вредност броја $R_{e_{kr}}$ и њему одговарајућа брзина \bar{v}_{kr} , при којима ламинарно струјање прелази у турбулентно назива се критична вредност. Експериментални резултати показују да је струјање флуида ламинарно ако је $R_e < 2000$ и турбулентно ако је $R_e > 3000$. У прелазној области између 2000 и 3000 струјање флуида је нестабилно.