2. ФИЗИЧКЕ ОСНОВЕ МЕХАНИКЕ

Механика је део физике који се бави проучавањем најједноставнијих облика кретања материје. Под механичким кретањем се подразумева промена положаја посматраних тела у односу на координатни систем везан за неко тело које се узима као реферетно. Уколико се реферетно тело сматра непокретним, онда се кретања у односу на такво тело сматрају апсолутним, а у супротном случају кретање су релативна. Механичко кретање је најједноставнији облик кретања материје зато што се не узима у обзир унутрашња структура тела и интеракције тих структура.

Механика се дели на кинематику и динамику. Кинематика се бави проучавањем кретања тела не водећи рачуна о узорцима који их изазивају. Динамика се бави проучавањем кретања тела под дејством сила као узорка који изазивају та кретања. Статика је посебна област динамике која проучава услове мировања тела.

Материјална тачка је идеализован модел за проучавање особина тела у мировању и кретању у физици када се облик и димензије тела у датом разматрању могу занемарити. Апсолутно круто тело је модел тела, које ни под каквим условма не мења свој облик и димензије.

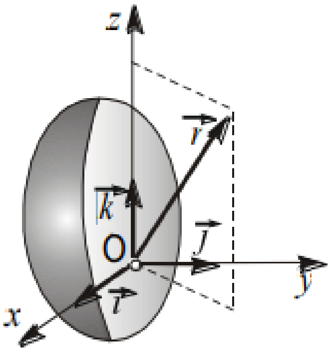
.

2.1. Кинематика материјалне тачке

Положај материјалне тачке у простору може се одредити само у односу на неко друго тело које се узима као референтно. У произвољној тачки, О, референтног тела могу се повући три оријентисана правца одређена одговарајућим јединичним векторима $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$, $\vec{k}$. Ова три правца називамо координатним осама (x, y и z-оса) и заједно са тачком О представљају координатни систем. У механици се најчешће употребљава десни правоугли тзв. Декартов координатни систем, приказан на слици 2.1, а по потреби и поларни, сферни, генералисани, итд. Положај материјалне тачке A у простору, у овом систему, одређен је скупом њених координата (x, y, z), односно помоћу вектора положаја:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\ , \tag{2.1}$$

где су x, y и z пројекције вектора $\vec{r}$ на означене осе.



Слика 2.1. Референтни систем

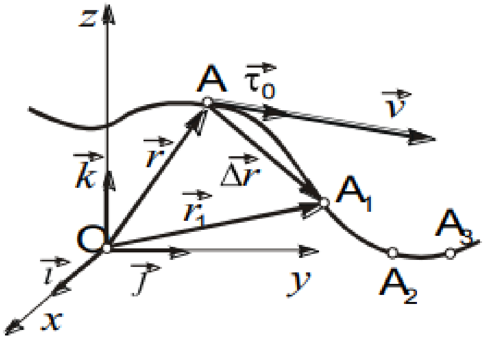
Кретање материјалне тачке се може дефинисати као непрекидна промена положаја у односу на дати координатни систем. Нека се материјална тачка *A* креће у односу на кординатни систем (Слика 2.2). Геометријско место узастопних положаја материјалне тачке *A* у току времена *t* назива се путања или трајекторија. Положај тачке *A* при кретању одређен је вектором положаја:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}\ . \tag{2.2}$$

Овој векторској једначини одговарају три скаларне једначине:

$$x = \ x(t);\, y = y(t);\, z = z(t). \tag{2.3}$$

Једначине (2.2) и (2.3) представљају коначне једначине кретања. Кретање материјалне тачке може бити одређено и ако се познаје геометријски облик путање по којој се тачка креће и пређени пут као функција времена.



Слика 2.2. Трајекторија

2.1.1. Брзина материјалне тачке

Посматрајмо кретање тачке *A* са Слике 2.2. Нека се тачка из овог положаја *A* у тренутку *t* који је одређен вектором положаја $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ премести у временском интервалу

Δt у тачку A_1 са вектором положаја $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OA_1}$. Према слици 2.2 може се написати једначина:

$$\overrightarrow{r_1} = \vec{r} + \Delta\vec{r} \tag{2.4}$$

Вектор $\overrightarrow{\mathrm{AA_1}} = \Delta\vec{r}$ је вектор промене (прираштај) вектора положаја $\vec{r}$ за временски интервал Δt. Вектор $\Delta\vec{r}$ је функција временског интервала Δt у којем је прираштај настао и назива се вектор померања тачке. Количник прираштаја вектора положаја $\Delta\vec{r}$ и интервала Δt назива се вектор средње брзине:

$$\overrightarrow{v_{sr}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{2.5}$$

Вектор $\overrightarrow{v_{sr}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ представља средњу промену вектора положаја у датом временском интервалу. Има исти смер као и вектор $\Delta\vec{r}$, док му је интензитет различит од интензитета вектора $\Delta\vec{r}$ зато што је $\Delta t > 0$. Са смањивањем временског интервала Δt, тачка A_1 ће се при непрекидном кретању по путањи приближавати тачки A. Гранична вредност односа у једначини (2.5), када $\Delta t \rightarrow 0$, назива се тренутна брзима у тачки A у тренутку t, и математички се може написати у облику:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \tag{2.6}$$

односно тренутна брзина $\vec{v}$ једнака је првом изводу вектора положаја тачке по времену. Како је $\Delta t > 0$, из једначине (2.5) следи да вектор $\overrightarrow{v_{sr}}$ у граничном случају прелази разних положаја сечица у положај тангенте у датој тачки A. Правац тангенте је одређен њеним орт вектором $\overrightarrow{\tau_0}$. При томе се интензитет вектора прираштаја изједначује са пређеним путем, постаје $dr = ds$, па се вектор брзине може изразити на следећи начин:

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{\tau_o} = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{\tau_o} = v\overrightarrow{\tau_o}. \tag{2.7}$$

У правоуглом координатном систему вектор брзине $\vec{v}$ има три компоненте дуж x, y, и z-осе. Диференцирањем вектора положаја $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ по времену добија се:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}, \tag{2.8}$$

где су:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \tag{2.9}$$

Према једначини (2.8) брзина је вектор одређен својим пројекцијама на координатне осе. Модул или интензитет брзине је:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{2.10}$$

Правци вектора брзине у односу на координатне осе одређени су преко косинуса углова које заклапа са њима:

$$\cos(\overrightarrow{\tau_o},\vec{\imath}) = \frac{\dot{x}}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$

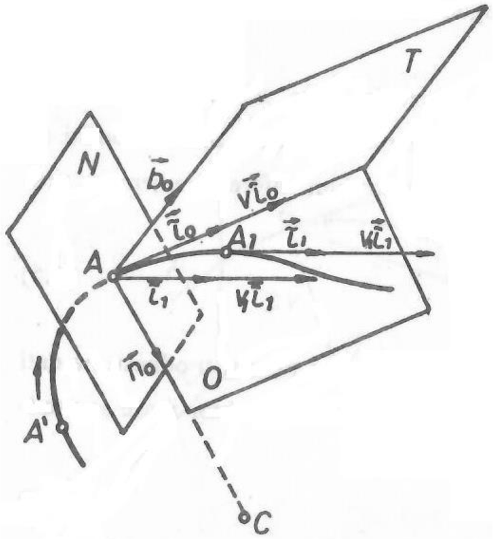
$$\cos(\overrightarrow{\tau_o},\vec{\jmath}) = \frac{\dot{y}}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \tag{2.11}$$

$$\cos(\overrightarrow{\tau_o},\vec{k}) = \frac{\dot{z}}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$$

2.1.2. Убрзање материјалне тачке

Приликом кретања материјалне тачке по путањи њен вектор брзине се мења. Посматрајмо кретање тачке *A* са слике 2.3. Нека материјална тачка положаја *A* у тренутку t има брзину $\vec{v}$, а у тренутку $t+\Delta t$ у положају A_1 има брзину $\overrightarrow{v_1}$. Брзине $\vec{v}$ и v_1 се у општем случају разликују и по интензитету и по правцу. Вектор промене брзине материјалне тачке $\Delta\vec{v}$ која се десила у интервалу Δt једнака је разлици вектора брзина $\vec{v}$ и v_1:

$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{v_1} - \vec{v} \tag{2.12}$$



Слика 2.3. Природни координатни триједар

Количник приштаја вектора брзине $\Delta\vec{v}$ и интервала Δt назива се вектор средњег убрзања:

$$\overrightarrow{a_{sr}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{2.13}$$

Вектор $\overrightarrow{a_{sr}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ представља средњу промену вектора брзине у датом временском интервалу. Има исти правац и смер као и вектор $\Delta\vec{v}$, док му је интензитет различит од интензитета вектора $\Delta\vec{v}$ зато што је $\Delta t > 0$. Гранична вредност односа у једначини (2.13), када $\Delta t \to 0$, назива се тренутно убрзање у тачки A у тренутку t, и математички се може написати у облику:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}, \tag{2.14}$$

односно, тренутно убрзање $\vec{a}$ једнака је првом изводу вектора брзине по времену. Из једначина (2.6) и (2.14) добија се:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}, \tag{2.15}$$

односно, вектор убрзања једнак је другом изводу вектора положаја покретне материјалне тачке по времену.

У правоуглом координатном систему вектор убрзања $\vec{a}$ има три компоненте дуж x, y, и z-осе. Двоструким диференцирањем вектора положаја $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ по времену добија се:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a\vec{k}, \tag{2.16}$$

где су:

$$a_x = \frac{d^2x}{d^2t} = \ddot{x}; \qquad a_y = \frac{d^2y}{d^2t} = \ddot{y}; \qquad a_z = \frac{d^2z}{d^2t} = \ddot{z}. \tag{2.17}$$

Према једначини (2.16) убрзање је вектор одређен својим пројекцијама на координатне осе. Модул или интензитет убрзања је:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{2.18}$$

Правци вектора брзине у односу на координатне осе одређени су преко косинуса углова које заклапа са њима:

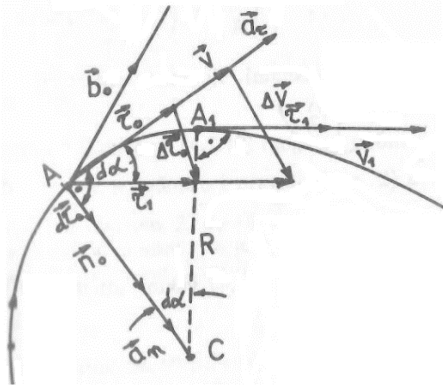
$$\cos(\vec{a},\vec{\imath}) = \frac{\ddot{x}}{a} = \frac{\ddot{x}}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

$$\cos(\vec{a},\vec{\jmath}) = \frac{\ddot{y}}{a} = \frac{\ddot{y}}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}} \tag{2.19}$$

$$\cos(\vec{a},\vec{k}) = \frac{\ddot{z}}{a} = \frac{\ddot{z}}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}$$

2.1.3. Тангенцијално и нормално убрзање материјалне тачке

Једначине (2.19) одређују правац вектора убрзања $\vec{a}$ у односу на осе непокретног координатног система. Размотримо однос вектора убрзања $\vec{a}$ према путањи посматране тачке (слика 2.4). Кроз тачку *A* просторне путање може се повући тангента јединичног орт вектора $\overrightarrow{\tau_0}$ и вектора брзине $\vec{v} = v\overrightarrow{\tau_o}$. Раван нормална на вектор $\overrightarrow{\tau_0}$ назива се нормална раван *N* путање у тачки *A*. Свака права која пролази кроз тачку *A* и лежи у равни *N* је нормална на $\overrightarrow{\tau_0}$ и $\vec{v} = v\overrightarrow{\tau_o}$. У некој другој тачки A_1 блиској тачки *A* орт вектор и вектор брзине су $\overrightarrow{\tau_1}$ и $= \overrightarrow{v_1} = v_1\overrightarrow{\tau_1}$. Преношењем орт вектора $\overrightarrow{\tau_1}$ паралелно самом себи у тачку *A*, добија се раван коју образују ортови $\overrightarrow{\tau_0}$ и $\overrightarrow{\tau_1}$, чија оријентација у простору зависи од облика трајекторије. У граничном случају када $A_1 \rightarrow A$, раван повучена кроз ортове $\overrightarrow{\tau_0}$ и $\overrightarrow{\tau_1}$ тежи граничном положају у простору и назива се оскуларна раван. Линија пресека нормалне и оскуларне равни назива се главна нормала $\overrightarrow{n_o}$ трајекторије у тачки *A*. Смер главне нормале $\overrightarrow{n_o}$ је од тачке *A* ка центру кривине трајекторије *O*. Нормала у тачки *A* која лежи у равни *N*, а нормална је на оскуларну раван, назива се бинормала $\overrightarrow{b_0}$. Орт вектори тангенте $\overrightarrow{\tau_0}$, главне нормале $\overrightarrow{n_o}$ и бинормале $\overrightarrow{b_0}$ образују десни триједар у тачки *A* и који прати њено кретање по трајекторији. Оријентација оса триједра се мења у простору у зависности од облика трајекторије и закона пута тачке А.



Слика 2.4. Тангенцијално и нормално убрзање

Како су интензит брзине и орт вектори тангенте $\overrightarrow{\tau_0}$ промењиви у току времена, на основу једначина (2.7) и (2.14) може се написати:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\overrightarrow{\tau_o}) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau_o} + v\frac{d\overrightarrow{\tau_o}}{dt}. \qquad (2.20)$$

Извод орт вектора тангенте може се написати у облику:

$$\frac{d\overrightarrow{\tau_o}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\tau_o}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{d\overrightarrow{\tau_o}}{ds} \tag{2.21}$$

Вектор $d\overrightarrow{\tau_o}$ има правац нормале у тачки A, и како лежи у оскуларној равни има правац и смер главне нормале $\overrightarrow{n_o}$. Интензитет вектора $d\overrightarrow{\tau_o}$ може се заменити углом $d\alpha$ којег образују две суседне тангенте чији су ортови $\overrightarrow{\tau_0}$ и $\overrightarrow{\tau_1}$ (слика 2.4). Тада је:

$$d\overrightarrow{\tau_o} = d\tau_o \cdot \overrightarrow{n_o} = d\alpha \cdot \overrightarrow{n_o}. \tag{2.22}$$

Да би се одредило ds, повуцимо главне нормале из тачака A и A_1 на њихове тангенте, које се секу у тачки C (центар кривине). Лук криве $ds = \widehat{AA_1}$, две веома блиске тачке, може се сматрати као лук круга полупречника $R = A_1C$. Круг чији се елеменат лука поклапа са елементом криве линије у датој тачки назива се кругом кривине, његов полупречник је полупречник кривине, а центар круга је центар кривине. Разни делови трајекторије очигледно имају различите полупречнике кривине. Са слике 2.4. се види да је:

$$ds = \widehat{AA_1} = d\alpha \cdot R. \tag{2.23}$$

На основу једначина (2.20), (2.21), (2.22) и (2.23) добија се следећа једначина:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau_o} + v^2\frac{d\alpha\cdot\overrightarrow{n_o}}{d\alpha\cdot R} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau_o} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{n_o}\ . \tag{2.24}$$

Из једначине (2.24) следи да вектор убрзања $\vec{a}$ има две компоненте у односу на природни триједар, тј. убрзање у правцу тангенте на трајекторију (тангенцијално убрзање - $\overrightarrow{a_\tau}$) и убрзање у правцу и смеру главне нормале (нормално убрзање - $\overrightarrow{a_n}$). Тангенцијално убрзање је:

$$\overrightarrow{a_\tau} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{\tau_o} = \frac{d^2s}{dt^2}\overrightarrow{\tau_o}, \tag{2.25}$$

а нормално убрзање је:

$$\overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\overrightarrow{n_o}. \tag{2.26}$$

Како је нормално убрзање усмерено ка центру кривине, назива се и центрипетално убрзање. Вектор убрзања $\vec{a}$ нема компоненту у правцу бинормале, односно $\vec{a}$ увек лежи у оскуларној равни трајекторије дате тачке. Тангенцијална компонента убрзање карактериче промену вектора брзине по величини, а нормална компонента карактерише промену брзине по правцу. Вектори тангенцијалног и нормалног убрзања су међусобно нормални, тако да се вектор убрзања може написати у облику:

$$\vec{a} = \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_n}, \tag{2.27}$$

односно, интезитет убрзање је:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}. \qquad (2.28)$$

У зависности од тога која компонента убрзања је заступљена при кретању материјалне тачке, разликују се следећи случајеви убрзаног кретања:

а) $a_t = 0$, $a_n = 0$ - кретање је равномерно праволинијско;

б) $a_t \neq 0$, $a_n = 0$ - неравномерно праволинијско;

ц) $a_t = 0$, $a_n \neq 0$ - равномерно криволинијско, односно кружно;

д) $a_t \neq 0$, $a_n \neq 0$ - неравномерно криволинијско, сложено кретање.

2.1.4. Равномерно кружно кретање материјалне тачке

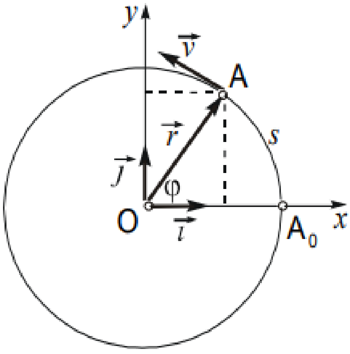
Равномерно кружно кретање материјалне тачке је кретање по кружној путањи са вектором брзине константним по интензитету. Ако се координатни систем постави у центар круга, као на слици 2.5, векторска једначина кретања тачке А је:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}\,. \qquad (2.29)$$

где су $x(t)$ и $y(t)$ пројекције вектора $\vec{r}(t)$ на координатне осе. За дати положај тачке А износе:

$$x = r\cos\varphi, \qquad (2.30)$$

$$y = r\sin\varphi. \qquad (2.31)$$



Слика 2.5. Кружно кретање

У току равномерног кружног кретања тачке А, равномерно се мења и угао φ по закону:

$$\varphi = \omega \cdot t, \qquad (2.32)$$

где је ω константна пропорционалности (угаона брзина). На основу једначине (2.32) пројекције вектора $\vec{r}(t)$ на координатне осе могу се написати у облику:

$$x = r\cos(\omega t), \tag{2.33}$$

$$y = r\sin(\omega t). \tag{2.34}$$

Једначине (2.33) и (2.34) су параметарске једначине кретања, а њиховим дизањем на квадрат и елиминисањем времена t као параметра добија се једначина трајекторије, облика:

$$r^2 = x^2 + y^2, \tag{2.35}$$

што је једначина круга. По њој се материјална тачка креће по закону пута:

$$s = r\varphi = r\omega t. \tag{2.36}$$

Брзина овог кретања се добија диференцирањем векторске једначине кретања по времену, при чему су ортови стални у односу на координатни систем, па се добија:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}. \tag{2.37}$$

Како је:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = -r\omega\sin(\omega t), \tag{2.38}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = r\omega\cos(\omega t), \tag{2.39}$$

једначина (2.37) постаје:

$$\vec{v} = -r\omega\sin(\omega t)\cdot\vec{\imath} + r\omega\cos(\omega t)\cdot\vec{\jmath}. \tag{2.40}$$

Интензитет вектора брзине је:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2\sin^2(\omega t) + r^2\omega^2 cos^2(\omega t)} = r\omega\ . \tag{2.41}$$

Из једначине (2.41) следи да је интензитет векора брзине $\vec{v}$ сталан у току времена, јер су ω и r константни. Да би одредили однос праваца вектоrа $\vec{v}$ и $\vec{r}$, помножићемо их скаларно:

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = [r\cos(\omega t)\cdot\vec{\imath} + r\sin(\omega t)\,\overrightarrow{\cdot\jmath}]\cdot[-r\omega\sin(\omega t)\cdot\vec{\imath} + r\omega\cos(\omega t)\cdot\vec{\jmath}] = 0, \tag{2.42}$$

Зато што је $\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = 1$, $\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = 1$ а $\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = \jmath\cdot\vec{\imath} = 0$. На основу предходног следи да је вектор брзине нормалан на радијус вектор, односно брзина је као нормала на радијус усмерена дуж тангенте круга у свакој тачки. Смер брзине је у смеру обртања, од A_0 ка A_1.

Иако је ово кретање равномерно, постоји убрзање које се одређује по једначини:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}, \tag{2.43}$$

Како је:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x = -r\omega^2\cos(\omega t), \tag{2.44}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a_y = -r\omega^2 \sin(\omega t), \tag{2.45}$$

једначина (2.45) постаје:

$$\vec{a} = -r\omega^2 \cos(\omega t) \cdot \vec{\imath} - r\omega^2 \sin(\omega t) \cdot \vec{\jmath}, \tag{2.46}$$

односно:

$$\vec{a} = -\omega^2[r \cos(\omega t) \cdot \vec{\imath} + r \sin(\omega t) \cdot \vec{\jmath}] = -\omega^2 \vec{r}. \tag{2.47}$$

Интензитет вектора убрзања је:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{r^2\omega^4 cos^2(\omega t) + r^2\omega^4 \sin^2(\omega t)} = r\omega^2 . \tag{2.48}$$

Из једначине (2.48) следи да је интензитет векора убрзања $\vec{a}$ сталан у току времена, односно тангенцијално убрзање је нула и постоји само нормално убрзање које је колинеарно са векором положаја $\vec{r}$ и супротног смера. Како је из дефиниције нормалне компоненте убрзања, једначина (2.26):

$$a_n = \frac{v^2}{r}, \tag{2.49}$$

на основу једначина (2.48) и (2.49) добијамо да је:

$$\omega = \frac{v}{r}. \tag{2.50}$$

2.2. Кинематика крутог тела

Круто тело је механички систем састављен од великог броја материјалних тачака за које је карактеристично да растојање између било које две његове тачке остаје стално, без обзира на спољне утицаје. Свака тачка тела при кретању описује одговарајућу трајекторију. На основу облика трајекторије сва сложена кретања крутог тела се своде на транслаторно (прогресивно) и ротационо (обртно). Да би се одредило кретање тела треба познавати кретање сваке његове тачке, по законима разматраним у поглављу 2.1. Ово захтева познавање великог броја једначина кретања (по три за сваку тачку). Овај проблем се решава користећи карактеристику крутог тела да је растојање између две његове произвољне тачке константно. Зато се положај крутог тела у односу на непокретни координатни систем одређује помоћу координата три његове тачке које не леже на једној равни. Како је растојање између две тачке:

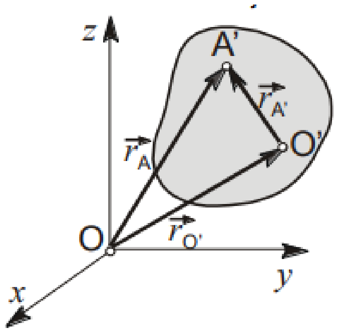
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \tag{2.51}$$

за одређивање положаја крутог тела је потребно и довољно познавати шест независних једначина. Из тог разлога се уводе појмови нових кинематичких величина, које су опште за све материјалне тачке, односно за тело, као што су угаони померај, угаона брзина и угаоно убрзање.

2.2.1. Транслаторно кретање крутог тела

Транслаторно кретање крутог тела је кретање при коме свака линија која спаја две произвољне тачке тела остаје паралелна самој себи, односно задржава своју оријентацију у простору. Положај произвољне тачке A у односу на непокретан координатни систем са слике 2.6 је одређен једначином:

$$\overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{r_0'} + \overrightarrow{r_A'}. \tag{2.52}$$



Слика 2.6. Транслаторно кретање крутог тела

Код транслаторног кретања крутог тела вектор $\overrightarrow{r_A'}$ је константан. Његове пројекције на осе координатног система су такође константне у току кретања. Нека је кретање тачке O' у односу на тачку O познато и дато параметарским једначинама у облику:

$$\begin{aligned} x_O' &= x_O'(t) \\ y_O' &= y_O'(t) \\ z_O' &= z_O'(t). \end{aligned} \tag{2.53}$$

На основу једначина (2.52) и (2.53) параметарска једначина кретања тачке A крутог тела у односу на непокретни координатни систем је:

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_O'(t) + a \\ y_A(t) &= y_O'(t) + b \\ z_A(t) &= z_O'(t) + c, \end{aligned} \tag{2.54}$$

где су a, b, и c пројекције вектора $\overrightarrow{r'_A}$ на координатне осе. Једначина (2.54) показује да уколико је позната путања тачке O', путања тачке A или било које друге тачке крутог тела се добија њеним померањем у правцу и смеру вектора $\overrightarrow{r'_A}$.

Брзина тачке A у односу на непокретни координатни систем добија се диференцирањем једначине (2.52) по времену:

$$\frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{r'_0} + \overrightarrow{r'_A})}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r'_0}}{dt}, \tag{2.55}$$

зато што је $\overrightarrow{r'_A}$ константан, и његов извод по времену је нула. Једначина (2.55) може се написати у обику:

$$\dot{\overrightarrow{r_A}} = \dot{\overrightarrow{r'_O}} \text{ или } \overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v'_O}. \tag{2.55}$$

При транслаторном кретању крутог тела брзина свих његових тачака су једнака.

Убрзање тачке A у односу на непокретни координатни систем добија се диференцирањем једначине (2.55) по времену:

$$\frac{d\overrightarrow{v_A}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{v'_0}}{dt}, \tag{2.56}$$

односно:

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a'_O}.$$

При транслаторном кретању крутог тела убрзање свих његових тачака су једнака.

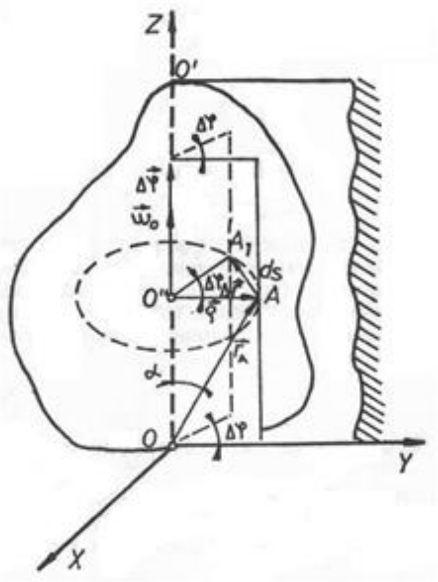
На основ претходних једначина следи да при транслаторном кретању крутог тела све његове тачке имају иста померања, брзину и убрзање. Зато се проучавање транслаторног кретања крутог тела своди на одређивање кретања само једне његове тачке, односно за кинематичко проучавање транслаторног кретања крутог тела користе се закони кретања материјалне тачке.

2.2.2. Ротационо кретање крутог тела око учвршћене осе

Код ротационог кретања крутог тела све његове тачке описују кружнице чији се центри налазе на једној правој која се назива оса ротације, при чему су тачке које припадају оси ротације непокретне. На слици 2.7 приказан је пример ротације крутог тела око његове две учвршћене тачке, са осом ротације која пролази кроз те тачке.

Свака тачка крутог тела има своју путању, брзину и убрзање и ове величине не могу да се користе за одређивање кретања целог крутог тела. Радијуси вектори свих тачака (вектор повучен из центра одговарајуће кружнице у дату тачку) заокрену се за исти угао $\Delta\varphi$ у току ротације. Угао $\Delta\varphi$ се назива угаони померај целог крутог тела и карактеристика је ротационог кретања крутог тела. За описивање ротације потребно је још одредити положај осе ротације и смер ротације крутог тела. Ово се постиже дефинисањем угаоног померaја као вектора. Његов интензитет је функција времена, $\Delta\varphi$ = φ(t), правац му је дуж осе ротације, а смер се одређује правилом десног завртња (такозвани позитивни смер). Ако одговарајући орт вектора осе ротације означимо са $\overrightarrow{\omega_0}$, тада се вектор угаоног померaја може написати у облику:

$$\overrightarrow{\Delta\varphi} = \Delta\varphi\overrightarrow{\omega_0}. \tag{2.57}$$



Слика 2.7. Кинематичке карактеристике ротације

Да би $\overrightarrow{\Delta\varphi}$ био вектор, није довољно да му се само припишу векторска својства, већ је неопходно да се покорава рачуну векторске алгебре. Наиме за два узастопна померaја крутог тела $\overrightarrow{\Delta\varphi_1}$ и $\overrightarrow{\Delta\varphi_2}$, његов резултујући померај према векторској алгебри треба да буде:

$$\overrightarrow{\Delta\varphi} = \overrightarrow{\Delta\varphi_1} + \overrightarrow{\Delta\varphi_2}, \tag{2.58}$$

али то није случај за угаоне помераје произвољне величине. У случају за врло мале угаоне помераје $\overrightarrow{\mathrm{d}\varphi_1}$ и $\overrightarrow{\mathrm{d}\varphi_2}$ важи:

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\varphi} = \overrightarrow{\mathrm{d}\varphi_1} + \overrightarrow{\mathrm{d}\varphi_2}. \tag{2.59}$$

Однос прираштаја угаоног померaја $\overrightarrow{\Delta\varphi}$ у интервалу Δt у коме је тај прираштај настао, назива се средња угаона брзина:

$$\overrightarrow{\omega_{sr}} = \frac{\overrightarrow{\Delta\varphi}}{\Delta t}. \tag{2.60}$$

Гранична вредност односа у једначини (2.60), када $\Delta t \to 0$, назива се тренутно угаона брзина крутог тела у тренутку t, и математички се може написати у облику:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \dot{\vec{\varphi}}. \tag{2.61}$$

На основу особине вектора $\overrightarrow{\mathrm{d}\varphi}$ следи да је и угаона брзина $\vec{\omega}$ кинематичка карактеристика целог крутог тела. Угаона брзина је аксијални вектор чији је интензитет:

$$\omega = |\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}, \tag{2.62}$$

правац дуж осе ротације крутог тела, а смер се одређује правилом десног завртња. Угаона брзина је вектор колинеаран са вектором угаоног померајa и може се представити у облику:

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \overrightarrow{\omega_0}, \tag{2.63}$$

где је $\overrightarrow{\omega_0}$ орт осе ротације.

Ротација чврстог тела константном угаоном брзином $\vec{\omega}$ назива се једнако ротационо кретање. Код њега је карактеристичан период ротације *T*, који представља време једног пуног обрта тела, односно ротације за 2π или 360°. Из дефиниције угаоне брзине следи да је:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}, \tag{2.64}$$

односно:

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{2.65}$$

Реципрочна вредност периода ротације, представља број обртаја у јединици времена и назива се учестаност или фреквенција *ν*, тако да је:

$$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{2.66}$$

Ако угаона брзина није константна, тада се количник промене вектора угаоне брзине настале у интервалу времена Δt, и тог временског интервала назива средње угаоно убрзање:

$$\overrightarrow{\alpha_{sr}} = \frac{\overrightarrow{\Delta\omega}}{\Delta t}. \tag{2.67}$$

Гранична вредност односа у једначини (2.67), када $\Delta t \to 0$, назива се тренутно угаоно убрзање крутог тела у тренутку t, и математички се може написати у облику:

$$\vec{\alpha} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\omega}{dt}\overrightarrow{\omega_0} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\overrightarrow{\omega_0} \tag{2.68}$$

Угаоно убрзиње $\vec{\alpha}$ је кинематичка карактеристика целог крутог тела. Уколико је оса ротације крутог тела у простору непомична, тада вектор угаоног убрзања $\vec{\alpha}$ лежи на оси ротације као и вектор угаоне брзине. Вектор $\vec{\alpha}$ је аксијални вектор, а његов смер зависи од знака прираштаја угаоне брзине.

2.2.3. Релација међу векторина линеарне $\vec{v_i}$ и угаоне $\vec{\omega}$ брзине

Величине $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ и $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ одређују ротационо кретање целокупног крутог тела. Међутим, свака материјална тачка крутог тела има своје линијске елементе кретања: пређени пут s_i, брзину $\vec{v_i}$ и убрзање $\vec{a_i}$. Како се поменуте величине односе на исто тело међу линијским и ротационим величинама мора постојати одређене релације.

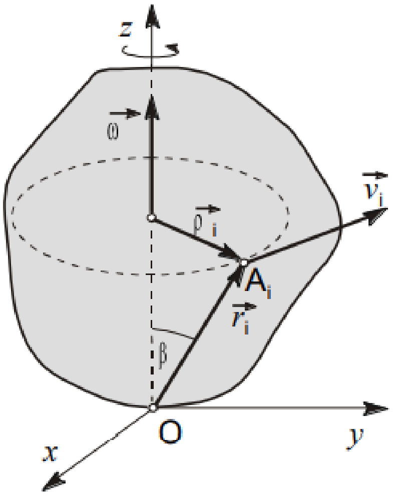
На слици 2.8 приказано је круто тело које ротира угаоном брзином $\vec{\omega}$ у односу на непокретни координатни систем. Посматрајмо тачку A_i чији је вектор положаја $\vec{r_i}$ и нека је угао β између $\vec{\omega}$ и $\vec{r_i}$. Ови вектори одређују раван на коју је вектор $\vec{v_i}$ нормалан и усмерен по десној оријентацији, тако да се може написати:

$$\vec{v_i} = \vec{\omega} \,\mathrm{x}\, \vec{r_i}. \tag{2.69}$$

Интензитет линеарне брзине је:

$$v_i = |\vec{\omega} \,\mathrm{x}\, \vec{r_i}| = \omega r_i \sin(\beta) = \omega \rho_i. \tag{2.70}$$

Из једначина (2.69) и (2.70) може се одредити линеарна брзина i-те тачке крутог тела уколико је позната угаона брзина крутог тела и њен положај.



Слика 2.8. Однос линијске и угаоне брзине

Из једначине (2.69) могу се одредити пројекције брзине $\vec{v_i}$ на осе непокретног координатне система. Нека су пројекције вектора $\vec{r_i}$ дате са x_i, y_i, z_i, а пројекције вектора

$\vec{\omega}$ са ω_x, ω_y i ω_z, док су ортово оса дати са i, j, и k. Тада се једначина (2.69) може написати у облику:

$$\vec{v_i} = \vec{\omega}\,\mathrm{x}\,\vec{r_i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix}. \qquad (2.71)$$

Пројекције брзине на координатне осе добијају се развијањем ове детерминанте:

$$\begin{aligned} v_{xi} &= \omega_y z_i - \omega_z y_i \\ v_{yi} &= \omega_z x_i - \omega_x z_i \qquad (2.72) \\ v_{zi} &= \omega_x y_i - \omega_y x_i \end{aligned}$$

Ове једначине је извео Ојлер (Euler) па се по њему и називају. У нашем случају са слике 2.8, где се оса ротације поклапа са z осом, при чему је $\omega_x = \omega_y = 0$, а $\omega_z = \omega$, једначина (2.72) постаје:

$$\begin{aligned} v_{xi} &= -\omega y_i \\ v_{yi} &= \omega x_i \qquad (2.73) \\ v_{zi} &= 0 \end{aligned}$$

2.2.4. Релације међу векторина линеарног $\overrightarrow{a_i}$ и угаоног $\vec{\alpha}$ убрзања

Диференцирањем једначине (2.69) можемо да одредимо убрзање i-те тачке крутог тела $\overrightarrow{a_i}$:

$$\overrightarrow{a_i} = \frac{d\vec{v_i}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\,\mathrm{x}\,\vec{r_i}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\,\mathrm{x}\,\vec{r_i} + \vec{\omega}\,\mathrm{x}\,\frac{d\vec{r_i}}{dt}, \qquad (2.74)$$

односно:

$$\overrightarrow{a_i} = \vec{\alpha}\,\mathrm{x}\,\vec{r_i} + \vec{\omega}\,\mathrm{x}\,\vec{v_i}. \qquad (2.75)$$

Вектор $\overrightarrow{a_{\tau i}} = \vec{\alpha}\,\mathrm{x}\,\vec{r_i}$ је нормалан на раван коју образују вектори $\vec{\alpha}$ и $\vec{r_i}$, самим тим је колинеаран са вектором брзине $\vec{v_i}$, односном са ортом тангенте $\overrightarrow{\tau_0}$ у тачки *A* при ротацији крутог тела по кругу полупречника $\rho = r_i \sin(\vec{\omega}, \vec{r_i})$. Убрзање $\overrightarrow{a_{\tau i}}$ има правац тангенте и назива се тангенцијално убрзање, док је интензитет вектора $\overrightarrow{a_{\tau i}}$:

$$a_{\tau i} = \alpha r_i \sin(\vec{\omega}, \vec{r_i}) = \alpha \rho_i = \frac{d\omega}{dt}\rho_i. \qquad (2.76)$$

Други члан у једначини (2.75) је:

$$\vec{\omega}\,\mathrm{x}\,\vec{v_i} = \vec{\omega}\,\mathrm{x}\,(\vec{\omega}\;x\;\vec{r_i}) = \vec{\omega}\,\mathrm{x}\,[\vec{\omega}\;x\;(\vec{r_z} + \vec{\rho_i})] = -\omega^2\vec{\rho_i} = \overrightarrow{a_{ni}}. \qquad (2.77)$$

Вектор $\overrightarrow{a_{ni}}$ је нормалан на раван коју одређују вектори $\vec{\omega}$ и $\vec{v_i}$ и усмерем је дуж радијус вектора ка центру кривине у тачки A_i и назива се нормално убрзање посматране тачке која ротира. Интензитет вектора $\overrightarrow{a_{ni}}$ је:

$$a_{ni} = \omega v_i \sin(\vec{\omega}, \vec{v_i}) = \omega v_i, \tag{2.78}$$

јер су вектори $\vec{\omega}$ и $\vec{v_i}$ нормални. Како се тачка A_i крутог тела креће по кругу полупречника ρ_i, а према једначини (2.70) је $v_i = |\vec{\omega} \times \vec{r_i}| = \omega\rho_i$, интензитет вектора $\overrightarrow{a_{ni}}$ може се написати у облику:

$$a_{ni} = \omega^2 \rho_i = \frac{v_i^2}{\rho_i}. \tag{2.79}$$

Дакле, нормално убрзање карактерише промену линеарне брзине по правцу.

2.3. Основни закони динамике

Део механике који се бави изучавањем кретања тела заједно са његовим узроцима назива се динамика. Узрок промене стања кретања или деформације тела је њихово међусобно дејство које се назива интеракција. Механичке интеракције тела дешавају се или непосредним додиром тела или посредством посебне материјалне средине која се назива физичко поље.

Ако једно тело доводи до кретања другог тела, тада се прво дело понаша као узрок за кретање другог тела, односно ова два тела интерагују. Сила је физичка величина којом се мере интеракције између тела. Сила није приступачна непосредном посматрању, већ се присуство силе манифестује преко последица коју она изазива интеракцијом, било између тела или између физичког поља и тела. Постоје два начина мерења силе: динамички који се заснива на мерењу промене кретања једног од тела као последица њихове интеракције и статички који се заснива на мерењу деформације тела изазваном силом.

Експериментално је установљено да дејство силе на дато тело зависи од нападне тачке силе, интензитета силе, правца и смера у коме се врши интеракција, односно сила преставља праву векторску величину.

2.3.1. Први Њутнов закон кретања - закон инерције

Први Њутнов закон или закон инерције гласи: “Свако тело остаје у стању мировања или равномерног праволинијског кретања све док код дејством силе није принуђено да своје стање промени. Овај закон треба схватити на следећи начин: (а) да је инерција својствена сваком телу, што значи да оно тежи за одржавањем стања релативног мировања или једнаког праволинијског кретања, (б) да сила није неопходан узрок кретања тела, јер и без присуства силе, тела могу да се крећу, (ц) промену кретања тела изазива сила, односно ако на тело делује сила оно се не може налазити у стању мировања. У овом закону се помињу се појмови мировање и равномерно кретање. Када се говори о мировању или равномерном кретању поставља се питање: у односу на који референтни (координатни) систем се то односи? Сам Њутн је подразумевао да се ту ради о неком апсолутном кретању у апсолутном простору: "Апсолутни простор је по својој суштини независан од било чега спољашњег и остаје увек исти и непокретан". Ово је метафизичко гледиште и не одговара стварности у којој се свако тело налази и креће. Кретање је могуће дефинисати само релативно, у односу на друга тела. Свако од њих можемо условно сматрати непокретним и за њега везати координатни систем. Кретање тела у односу на условно непокретни координатни систем називају се апсолутна кретања. Међутим, ова кретања са Њутновог гледишта нису апсолутна зато што кретање једног истог тела зависи од избора координатног система. Према томе први Њутнов закон важи само за специјалну врсту координатног система. Координатни систем, у односу на који изоловано тело мирује или се равномерно и праволинијски креће, назива се инерцијални координатни систем. У условима на Земљи немогуће је остварити кретање тела на које не би дејствовале силе гравитације, услед тога сваки координатни систем везан за Земљу је неинерцијални систем. Постојање инерцијалних система потврђено је експериментално из астрономских посматрања.

2.3.2. Други Њутнов закон

Други Њутнов закон одређује карактеристике кретања тела под дејством силе. Као основну карактеристику механичког кретања тела Њутн је увео физичку величину која се зове количина кретања или импулс и која је дефинисана као производ масе и брзине тела:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{2.80}$$

Вектор количине кретања $\vec{p}$ колинеаран је са вектором брзине тела $\vec{v}$, а интензитет му је једнак производу масе и интензитета брзине. У Декартовом координатном систему вектор $\vec{p}$ у општем случају има три компоненте дуж оса у облику:

$$\begin{aligned} p_x &= mv_x \\ p_y &= mv_y \\ p_z &= mv_z \end{aligned} \tag{2.81}$$

Ако је маса константна и већа од нуле, као што се у класичној механици увек претпоставља, тада из једначине (2.80) следи да је промена количине кретања проузрокована променом вектора брзине $\vec{v}$. На основу појма количине кретања и експерименталних запажања о кретању тела под дејством сила, Њутн је формулисао други закон динамике који гласи: Промена количине кретања, настала у малом интервалу времена и подељена са тим интервалом времена, сразмерна је сили која делује на тело, и дешава се у правцу и смеру те силе. Овај закон се може написати у облику:

$$\frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \vec{F}. \qquad (2.82)$$

Гранична вредност односа у једначини (2.82), када $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \qquad (2.83)$$

Ако је маса константна, једначина (2.83) може се написати у облику:

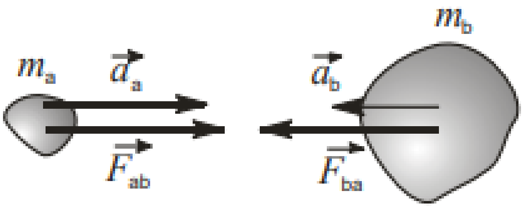
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F}. \qquad (2.84)$$

Једначина (2.84) је диференцијална једначина кретања тела, при чему је $\vec{F}$ резултанта свих интеракција тела масе m са свим другим телима, а $\vec{a}$ је убрзање тела у односу на неки инерцијални систем.

2.3.2. Трећи Њутнов закон

У првом и другом Њутновом закону о сили се говорило као о узроку промене стања кретања тела, али није се водило рачуна о изворима, односно о другим телима која изазивају ту промену. Сила у општем слушају карактерише међусобну интеракцију два тела и њена права улога у интеракцији је одређена трећим Њутновим законом, који гласи: Узајамна дејства двају тела су међусобно једнака и супротно усмерена, односно сила акције је по интензитету једнака, а по смеру супротна сили реакције. И овај закон потиче из уопштавања искуствених чињеница. На пример, посматрајмо узајамно дејство два тела маса m_a и m_b (Земља и камен, Земља и месец, два тела везана напрегнутом опругом), као на слици 2.9. Силе којима једно тело делује на друго једнаке по интензитету, а супротне по смеру:

$$\overrightarrow{F_{ba}} = -\overrightarrow{F_{ab}}. \qquad (2.85)$$



Слика 2.9. Акција и реакција

Једна од ових сила (рецимо $\overrightarrow{F_{ab}}$) се назива акција, а друга реакција. Под дејством ових сила тела ће променити стање кретања (динамичко дејство сила) или извршити деформацију облика (статичко дејство). Трећи Њутнов закон има извесна ограничења. Не може се применити на силе које зависе од брзине кретања тела, какве су Лоренцова сила и инерцијалне силе. Такође се у њему не води рачуна о коначности брзине простирања сваког дејства (што у Њутново време није ни било познато).

Карактеристике кретања тела под дејством силе одређене су другим Њутновим законом, по којем добијамо убрзања за тела са слике 2.9:

$$\overrightarrow{a_b} = \frac{\overrightarrow{F_{ba}}}{m_b} \tag{2.86}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{\overrightarrow{F_{ab}}}{m_a}. \tag{2.87}$$

Из ових једначина, и једначине (2.85) следи:

$$\overrightarrow{a_a} = -\frac{m_b}{m_a}\overrightarrow{a_b}. \tag{2.88}$$

Дакле, оба тела мењају стање кретања због узајамног дејства и та промена је обрнуто пропорционална маси тела.

2.4. Рад сила и енергија

2.4.1. Рад силе

Померање материјалне по неком праволинијском растојању $\vec{s}$ под дејством силе $\vec{F}$ у механици се назива радом. Учинак константне силе одређује се скаларним производом силе и растојања по којем се помера материјална тачка:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos(\vec{F}, \vec{s}) = Fs\cos(\alpha), \tag{2.89}$$

и назива се радом силе. Рад је позитиван ако сила $\vec{F}$ и растојање $\vec{s}$ заклапају оштар угао ($\alpha < \pi/2$). Сила не врши рад када је $\alpha = \pi/2$. Сила врши негативан рад ако са правцем вектора $\alpha < \pi/2$ заклапа туп угао ($\alpha > \pi/2$), и таква сила увек преставља отпор.

Уколико је сила промењива и зависи од растојања $\vec{F} = \vec{F}(\vec{s})$, а померање се врши дуж криве произвољног облика, тада се укупни рад у првој апроксимацији може изразити као збир елементарних радова учињених на коначном броју праволинијских делова $\Delta\vec{s}$, на које је подељено померање $\vec{s}$:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \cdot \Delta\vec{s_i} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \Delta s_i \cos\left(\vec{F_i}, \Delta\vec{s_i}\right), \tag{2.90}$$

где је $\vec{F_i}$ средња константна вредност силе на i-том подеоку померања $\Delta\vec{s_i}$, којих има n. Права вредност извршеног рада добија се из једначине (2.90) као граничан случај када $\Delta\vec{s_i} \to 0$, а $n \to \infty$, односно:

$$A = \lim_{\Delta\vec{s_i} \to 0} \vec{F_i} \cdot \Delta\vec{s_i} = \int_{A_1}^{A_2} \delta A = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \tag{2.91}$$

где је сила $\vec{F} = \vec{F}(\vec{s})$ позната функција растојања, а s_1 и s_2 су почетни и крајњи положаји тачке померања.

2.4.2. Снага или ефект рада

Снага или ефект рада је величина која карактерише брзину извршеног рада. Снага P неке силе $\vec{F}$ бројно је једнака раду извршеном у јединици времена:

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \tag{2.92}$$

где је $\vec{v}$ брзина кретања честице, а $\vec{F}$ сила која дејствује на честицу. Уколико снага силе зависи од времена, тада се рад те силе може написати у облику:

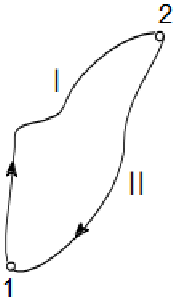
$$A = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt. \tag{2.93}$$

2.4.3. Конзервативне и неконзервативне силе

Ако рад силе $\vec{F}$ приликом померања материјалне тачке из произвољног полажаја 1 у положај 2 није једнак нули и не зависи од облика и величине пута по коме се тачка померала, таква се сила назива конзервативна. Сила чији рад зависи од пута назива се не конзервативна.

Рад конзервативне силе по произвољном затвореном путу L 1-I-2-II-1 (слика 2.9) једнак је збиру радова извршених на сваком од његових делова:

$A = A_{1-I-2} + A_{2-II-1}$. (2.94)



Слика 2.10. Рад по затвореној путањи

Из једначине (2.89) следида промена смера померања за угао π дуж путање изазива промену знака рада јер је $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$. На основу овога следи да је:

$A_{2-II-1} = -A_{1-II-2}$, (2.95)

и једначину (2.94)можемо написати у облику:

$A = A_{1-I-2} - A_{2-II-1}$. (2.96)

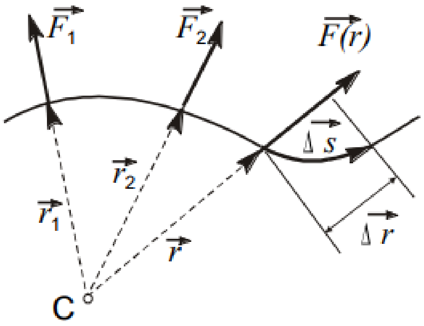
Како рад конзевативних сила не зависи од облика путање већ од његових крајњих тачака, зато је:

$A_{1-I-2} = A_{2-II-1}$, (2.97)

И на основу једначина (2.96) и (2.97) следи даје рад конзервативних сила по затвореној путањи L једнак нули:

$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{s} = A_{1-I-2} + A_{2-II-1} = 0$. (2.94)

Пример конзервативних сила су централне силе. Сила која делује на материјалну тачку или тело се назива централна, ако њен правац дејства за време кретања тела пролази кроз једну непокретну тачку у простору *C* која се назива центар силе (слика 2.10).



Слика 2.10. Рад централне силе

Централна сила може се написати у облику:

$$\vec{F} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}, \tag{2.95}$$

где је $\vec{r}$ вектор положаја тела у односу на центар центар силе, а F интензитет силе. Централна сила може имати смер ка центру или од њега. Елементарни рад централне силе $\vec{F}(r)$ на померању $\Delta\vec{s}$ је:

$$\Delta A = \vec{F}(r) \cdot \overrightarrow{\Delta s} = F(r) \cdot \Delta s \cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{\Delta s}\right). \tag{2.96}$$

Како је $\Delta s \cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{\Delta s}\right)$ пројекција помењања $\Delta\vec{s}$ на правац силе $\vec{F}(r)$, односно на правац радијуса $\vec{r}$ и представља прираштај растојања покретне тачке од центра C, и може се написати:

$$\Delta s \cos\left(\vec{F}, \overrightarrow{\Delta s}\right) = \Delta s \cos\left(\vec{r}, \overrightarrow{\Delta s}\right) = \Delta r, \tag{2.97}$$

тако да се једначина (2.96) може написати у облику:

$$\Delta A = F(r) \cdot \Delta r. \tag{2.98}$$

Укупан рад на целом путу је:

$$A = \lim_{\Delta \vec{r}_i} \sum_{r=r_1}^{r=r_2} F(r_i) \cdot \Delta r_i = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr. \tag{2.99}$$

Како подинтегрална функција у једначини (2.99) зависи само од растојања r, а не и од облика и величине пута, што потврђује да су централне силе конзервативне. Пример конзервативних сила су гравитационе силе, електростатичке силе, еластичне силе.

2.4.4. Енергија механичког кретања

Импулс $\vec{p} = m\vec{v}$ је једна од карактеристичних величина при транслаторном кретању. Међутим, ова динамичка величина не може бити права мера за све облике кретања. Код изолованог система, укупан импулс може бити нула а да се тела унутар њега ипак крећу. Зато се уводи нова физичка величина енергија која би боље описивала стање кретања физичких тела и њихових система и посебно односе међу њима, као и трансформације механичког кретања тела у друге облике кретања материје и њихов континуитет. Енергија се дефинише као способност тела да врши рад. Механичка енергија карактерише кретање тела и његову интеракцију са другим телима. Из искуства је познато да тело може имати енергију или услед свог кретања - кинетичка енергија, или услед свог положаја у пољу неке потенцијалне силе - потенцијална енергија.

2.4.4.1. Кинетичка енергија

Дејство силе $\vec{F}$ на честицу масе m манифестује се у промени њене брзине од $\overrightarrow{v_1}$ до $\overrightarrow{v_2}$. Рад који при том врши сила улаже се у промену брзине честице, а мера те промене је кинетичка енергија. Дакле, кинетичка енергија је рад силе да би честица променила брзину од $\overrightarrow{v_1}$ до $\overrightarrow{v_2}$. Елементарни рад силе је:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right), \tag{2.100}$$

где је:

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{\overrightarrow{v^2}}{2}\right) = d\left(\frac{v^2}{2}\right), \tag{2.101}$$

при чему је квадрат вектора једнак квадрату његовог модула. Величина:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \tag{2.102}$$

назива се кинетичка енергија честице, а величина dA елементарни рад силе $\vec{F}$ на померању $d\vec{s}$. Интеграљењем једначине (2.102) у границама одговарајућих положаја честице добија се:

$$\int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\int_{v_1}^{v_2} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2, \tag{2.103}$$

где је $\overrightarrow{v_1}$ брзина честице у положају s_1, а $\overrightarrow{v_2}$ брзина честице у положају s_2. Дакле, рад силе извршен на слободној честици масе m, једнак је промени њене кинетичке енергије:

$$\mathrm{A} = \int_{s_1}^{s_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = E_{k_2} - E_{k_1} = \Delta E_k. \tag{2.104}$$

Кинетичка енергија зависи од масе и квадрата брзине честице. За израчунавање кинетичка енергија није важно на који је начин честица стекла брзину $\vec{v}$, што значи да је кинетичка енергија функција њеног стања кретања. На основу горњег израза, кинетичка енергија не може бити негативна, $E_k \geq 0$.

Кинетичка енергија је адитивна физичка величина. За систем од n честица, кинетичка енергија је једнака збиру кинетичких енергија свих честица тог система:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} E_{k_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}m_i v_i^2. \tag{2.105}$$

2.4.4.2. Потенцијална енергија

Потенцијална енергија је енергија која само зависи од положаја честице у односу на другу честицу (тело) са којом интерагује. Значи, честица се налази у пољу дејства силе интеракције друге честице, Потенцијална енергија мери се радом силе интеракције да уочену честицу премести из тачке поља чији вектор положаја r у неку другу тачку поља чији је вектор положаја r_0, без промене њене брзине. У случају конзервативних сила тај рад се може изразити као разлика вредности једне функције растојања почетка и краја померaја:

$$U(r) - U(r_0) = \int_r^{r_0} \vec{F}(r) d\vec{r}. \qquad (2.106)$$

Вредност константе $U(r_0)$ је неодређена, па се потенцијална енергија може одредити тачношћу једне произвољне константе. Зато, физички смисао има разлика потенцијалне енергије честице за два њена положаја:

$$U(r_1) - U(r_2) = U(r_0) + \int\limits_{r_1}^{r_0} \vec{F}(r) d\vec{r} - U(r_0) - \int\limits_{r_2}^{r_0} \vec{F}(r) d\,\vec{r} =$$

$$= \int_{r_1}^{r_0} \vec{F}(r) d\vec{r} - \int_{r_2}^{r_0} \vec{F}(r) d\,\vec{r}. \qquad (2.107)$$

Како рад силе мења знак при промени смера померања, једначина (2.107) постаје:

$$U(r_1) - U(r_2) = \int_{r_1}^{r_0} \vec{F}(r) d\vec{r} + \int_{r_0}^{r_2} \vec{F}(r) d\,\vec{r}. \qquad (2.108)$$

Десна страна представља рад силе интеракције при померању честице из положаја r_1 у положај r_2, преко тачке чији је вектор положаја r_0. Како рад не зависи од пута по коме је вршено померање, то својство не обавезује тачку померању из положаја r_1 у положај r_2 прође кроз положај r_0. На основу тога, једначина (2.108) постаје:

$$U(r_1) - U(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}(r) d\vec{r}. \qquad (2.109)$$

Дакле, рад силе интеракције врши се на рачун смањења функције $U(r)$ при померању честице из положаја r_1 у положај r_2. Диференцирањем израза (2.109) добијамо:

$$-dU(r) = \vec{F}(r) d\vec{r} = dA. \qquad (2.110)$$

Овде је dA тотални диференцијал јер је сила конзервативна. Видимо да функција $U(r)$ има димензије рада и представља величину која се назива потенцијална енергија честице. Услед неодређености константе $U(r_0)$, референтни ниво потенцијалне енергије може бити произвољно изабран. Уобичајено је да се у централним пољима за референтни ниво узме вредност у $r_0 \to \infty$, где је $U(r_0) = 0$. У том случају је:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}(r) d\vec{r} = A\ (\vec{r} \to \infty). \qquad (2.111)$$

За овакав референтни ниво потенцијална енергија је увек при привлачењу честица негативна и једнака је раду сила интеракције потребном да честицу из бесконачности преведу у тачку са вектором положаја $\vec{r}$. Простор у коме делује нека конзервативна сила назива се потенцијално поље. Свакој тачки потенцијалног поља, одговара са једне стране сила $\vec{F}(r)$ која дејствује на честицу, а са друге стране нека вредност потенцијалне енергије честице $U(r)$. Значи да између ове две величине мора да постоји одређени однос. Овај однос следи из својстава конзервативних сила да рад силе не зависи од облика пута, већ од положаја и да се врши на рачун смањења потенцијалне енергије, односно да је рад конзервативне силе тотални диференцијал одговарајуће функције. Под наведеним условом, дакле за случај конзервативне силе, када је рад силе тотални диференцијал, однос силе и потенцијалне енергије следи непосредно из израза (2.110). У том случају можемо писати да је:

$$\vec{F}(r) = -\frac{dU(r)}{dr}\overrightarrow{r_0}. \tag{2.112}$$

Ово важи за произвољан правац у простору, а за правце дуж координатних оса Декартовог система се добија:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2.113}$$

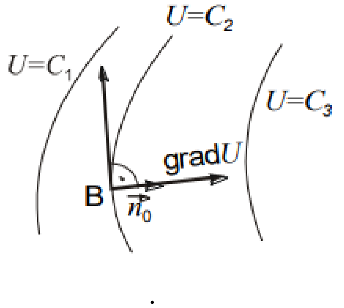
Једначина (2.113) одређује пројекције вектора силе на координатне осе. Ако су познате те пројекције, онда се вектор силе може написати у облику:

$$\vec{F}(r) = \left(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_y\vec{k}\right) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right). \tag{2.114}$$

Вектор са десне стране једначине (2.114) у математици се назива градијент скалара $U(x,y,z)$ и означава се са ∇ или grad, тако да се једначина (2.114) може написати у облику:

$$\vec{F}(r) = -\text{grad}\, U \equiv -\nabla U. \tag{2.115}$$

Физички смисао вектора $\text{grad}\, U$ добићемо из следеће анализе. Нека је $U(\vec{r}) = U(x,y,z) = \text{const.} = C$ једначина површине чије све тачке имају исту вредност потенцијалне енергије - еквипотенцијална површина. Мењањем C добија се бесконачан број еквипотенцијалних површина, које се не секу, као што је то илустровано на слици 2.11. Кроз једну тачку поља због једнозначности функције $U(\vec{r})$ може се повући само једна еквипотенцијална површина.



Слика 2.11. Еквипотенцијалне површине и градијент

Ако честица учини помак $d\vec{r}$ по еквипотенцијалној површини, извршени рад мора бити једнак нули:

$$dA = -\text{grad}\, U \cdot d\vec{r} = -dU(r) = 0, \qquad (2.116)$$

јер је $U(r) = const.$, а $dU(r) = 0$. Дакле, вектor grad U је нормалан на тангенту повучену на еквипотенцијалну површину. Ако у тачки B повучемо нормалу у смеру у коме $U(\vec{r})$ расте, можемо писати да је:

$$\text{grad}\, U = |\text{grad}\, U| \cdot \overrightarrow{n_o}, \qquad (2.117)$$

где је $\overrightarrow{n_o}$ јединични вектор нормале на еквипотенцијалну површину. Нека честица изврши померање $d\vec{r}$ дуж нормале, у ком правцу се мења скалар $U(r)$. Тада је $d\vec{r} = dn \cdot \overrightarrow{n_o}$, где је dn елемент померања дуж нормале, а $\overrightarrow{n_o}$ је јединични вектор. Тада ће елементарни рад вектора grad U на овом померају бити:

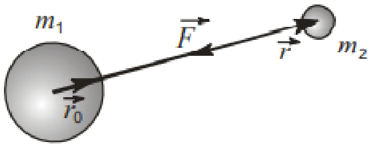
$$dA = grad\ U \cdot dn\,\overrightarrow{n_o} = dU. \qquad (2.118)$$

Како је $dU > 0$, тада је $grad\ U\,\overrightarrow{n_o} > 0$, а $\overrightarrow{n_o}$ и $grad\ U$ су колинеарни.

2.4.5. Гравитационо поље, рад и потенцијална енергија

Сила универзалне гравитације између два тела (честице) маса m_1 и m_2, којом тело масе m_1 делује на тело масе m_2, пропорционална је величинама маса а обрнуто пропорционална квадрату њиховог међусобног растојања r, означеног на слици 2.12:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{r_o}. \qquad (2.119)$$



Слика 2.12. Њутнов закон гравитације

Пошто је маса позитивна величина, знак минус указује да је гравитациона сила увек привлачна. Константа универзалне гравитације γ има исту вредност у целом космосу. Експериментално је измерена и износи $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}. Ово је очигледно веома мали број, па је и гравитациона сила мала уколико масе тела нису велике (рецимо као планете). Сила би могла бити велика ако је r веома мало, међутим тада делују друге јаче силе тако да је гравитација маскирана.

У случају гравитационих сила (као и електричних и магнетних) тела делују једна на друге без непосредног контакта. Да би се објаснило узајамно дејство раздвојених тела уводи се појам физиког поља, као једног облика испољавања материје, посредством којег се остварују узајамна дејства удаљених тела.

Свако тело масе m ствара у простору гравитационо поље којим дејствује на било које друго тело, масе m_{p}, које се нађе у том пољу, силом која је пропорционална m_{p}:

$$\vec{F} = m_p\vec{G}. \qquad (2.120)$$

Вектор $\vec{G}$ не зависи од масе m_p и назива се јачина гравитационог поља:

$$\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m_p} = -\frac{1}{m_p}\gamma\frac{m \cdot m_p}{r^2}\overrightarrow{r_o} = \gamma\frac{m}{r^2}\overrightarrow{r_o}. \qquad (2.121)$$

Дакле, јачина гравитационог поља је гравитациона сила по јединици масе у тачки где се налази пробно тело. Вектор $\vec{G}$ је колинеаран са $\vec{F}$. Његов интензитет зависи од масе тела које ствара гравитационо поље и од положаја тачке у којој се одређује његова јачина. Поље се често дефинише као простор у коме сваком положају одговара по одређеном закону само једна вредност и то без обзира да ли је у тој тачки присутно друго тело или не. Пробно тело m_{p} служи нам само као индикатор (инструмент за мерење) постојања гравитационог поља. Са друге стране и тело пробне масе m_{p} ствара своје поље и делује на тело m силом:

$$\overrightarrow{F_p} = m\overrightarrow{G_p}. \qquad (2.122)$$

Силе $\vec{F}$ и $\overrightarrow{F_p}$ су једнаке по интензитету и правцу, али су супротних смерова и покоравају се трећем Њутновом закону. Гравитационо поље је хомогено када су му у свим тачкама интензитети исти и вектори $\vec{G}$ међусобно паралелни, а централно је када се правци свих вектора $\vec{G}$ секу у једној тачки. Поље усамљеног тела је централно гравитационо поље.

Јачина векторског поља образованог од више тела једнака је векторском збиру јачина поља образованих појединим телима:

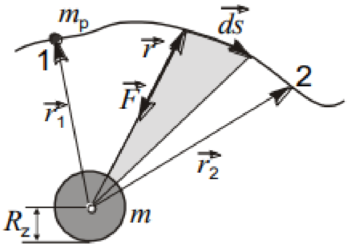
$$\vec{G} = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{G_\imath} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\overrightarrow{F_\imath}}{m_p} = \sum_{i=1}^{n} -\gamma\frac{m_i}{\overrightarrow{r_\imath^3}}\overrightarrow{r_\imath}, \qquad (2.123)$$

Где су m_i и r_i маса и растојања i-тог тела у односу на координатни почетак неког инерцијалног система. За представљење поља уведен је појам линија сила поља. То су линије у чијој се свакој тачки тангента поклапа са правцем вектора $\vec{G}$.

Рад гравитационе силе је по дефиницији скаларни производ гравитационе силе

$\vec{F}$ и пређеног пута $d\vec{s}$. Размотримо случај кретања материјалне тачке масе m_p у пољу дејства гравитационе силе масе m као на слици 2.13. Елементарни рад је:

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{s} = m_p\cdot\vec{G}\cdot d\vec{s}. \tag{2.124}$$



Слика 2.13. Рад гравитационе силе

За сферно тело масе $m >> m_p$ је:

$$\vec{F} = -\gamma\frac{m\cdot m_p}{r^2}\overrightarrow{r_o}, \tag{2.125}$$

па је елемент рада:

$$dA = \vec{F} = -\gamma\frac{m\cdot m_p}{r^2}(\overrightarrow{r_o}\cdot d\vec{s}) = \gamma\frac{m\cdot m_p}{r^2}dr, \tag{2.126}$$

зато што је $ds\cos(\overrightarrow{r_o}, d\vec{s}) = dr$. Укупан извршен рад при коначном померању тела из тачке 1 у тачку 2 је:

$$A_{1-2} = -\gamma m m_p\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \gamma m m_p\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right). \tag{2.127}$$

Значи рад гравитационе силе зависи од радијалних растојања r_1и r_2, а не зависи од облика и величине пута тела. Ово је особина конзервативних сила што значи да је гравитациона сила конзервативна.

Према једначини (2.127) рад гравитационе силе A_{1-2} једнак је смањењу потенцијалне егергије пробног тела масе m_p:

$$A_{1-2} = U_1 - U_2 = -\Delta U = -\gamma m m_p\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right). \tag{2.128}$$

За елементарно померање је одавде dA = – dU. Из једначине (2.128) је рад промена потенцијалне енергије тела, па је практично ирелевантно у односу на који референтни ниво $U_0(r) = 0$ се рачуна. За референтни ниво се може узети површина Земље, па је при

$$U = \gamma m_z m_p\left(\frac{1}{R_Z}-\frac{1}{r}\right) = \gamma m_z m_p\left(\frac{r-R_{Z\cdot}}{R_Z\cdot r}\right) = \gamma m_z m_p\frac{h}{R_Z\cdot r}, \tag{2.129}$$

Где је $h = r - R_Z$. висина тела масе m_p над нивоом мора. Ако је $h << R_Z$, тада је $R_Z.r = R_Z^2$, и једначина (2.129) може се написати у облику:

$$U= \gamma \frac{m_z m_p}{R_Z^2} \cdot h = m_p g h. \qquad (2.130)$$